ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 24 AVRIL 1922.

PRÉSIDENCE DE M. ÉMILE BERTIN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la théorie des invariants intégraux.*
Note de M. E. Goursat.

Dans un Ouvrage récent, *Leçons sur les invariants intégraux,* M. Cartan a fait d'intéressantes applications à la Mécanique de certains invariants intégraux qu'il appelle *complets*, et où le temps t figure non seulement dans les coefficients, mais aussi par sa différentielle dt sous le signe d'intégration. Il a montré comment de tout invariant intégral absolu, au sens de H. Poincaré, on peut déduire un invariant complet, et inversement. Au premier abord, le procédé de M. Cartan paraît absolument distinct des différentes méthodes indiquées par H. Poincaré, et qui permettent de déduire, d'un ou plusieurs invariants intégraux connus, de nouveaux invariants. Mais un examen plus attentif permet de montrer que le procédé de M. Cartan est équivalent en réalité à une combinaison des méthodes de H. Poincaré.

1. Je rappellerai d'abord quelques résultats biens connus. Soit

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt \tag{1}$$

un système d'équations différentielles, dont les dénominateurs ne renferment pas le temps t, et soit $I_p = \int \omega$ un invariant intégral de ce système, où ω est une forme *symbolique* de différentielles (forme *extérieure* de M. Cartan),

$$\omega = \Sigma A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_p},$$

dont les coefficients ne dépendent pas de t. Différents passages des Mémoires de H. Poincaré ont conduit à une méthode générale permettant de déduire

de l'invariant I_p un invariant intégral d'ordre $p-1$, $I_{p-1} = \int \omega_1$, où ω_1 est une autre forme symbolique de degré $p-1$, qui se déduit de ω en remplaçant successivement dans chaque terme une des différentielles dx_i qui y figurent par X_i et multipliant ensuite le coefficient par ± 1, suivant la place de la différentielle dx_i.

J'ai appelé opération (E) l'opération par laquelle on passe de l'invariant absolu I_p à l'invariant I_{p-1}. Les invariants I_{p-1} ainsi obtenus ne sont pas quelconques; ce sont aussi des invariants intégraux pour tous les systèmes différentiels que l'on obtient en remplaçant, dans les équations (1), dt par $\lambda(x_1, \ldots, x_n)\,dt$, quelle que soit la fonction $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Si y_1, y_2, ..., y_{n-1} sont $n-1$ intégrales premières, indépendantes de t, du système (1), la forme ω_1 s'exprime uniquement au moyen de $y_1, \ldots, y_{n-1}$, $dy_1, \ldots, dy_{n-1}$. C'est ce que M. Cartan appelle une *forme différentielle invariante* du système (1).

Supposons maintenant que les dénominateurs X_i, et les coefficients de la faune ω, ou du moins quelques-uns, puissent renfermer t. Considérons le système auxiliaire à $n+1$ inconnues

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{\overline{X}_1} = \frac{dx_2}{\overline{X}_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\overline{X}_n} = \frac{dx_{n+1}}{1} = dt,$$

où $\overline{X}_i$ désigne la fonction X_i, où l'on a remplacé t par x_{n+1}, et soit de même Ω la forme symbolique qui se déduit de ω en remplaçant t par x_{n+1} dans les coefficients. Si l'intégrale $I_p = \int \omega$ est un invariant intégral par le système (1), on vérifie aisément que $I_{p+1} = \int \Omega\, dx_{n+1}$ est un invariant intégral pour le système (2), car les deux systèmes de conditions sont identiques. L'opération (E), appliquée à cet invariant intégral I_{p+1}, conduit à un nouvel invariant d'ordre p, qui est identique à l'invariant complet de M. Cartan, quand on y remplace x_{n+1} et dx_{n+1} par t et dt respectivement.

2. La méthode s'applique aussi aux invariants relatifs. Si $J_p = \int \omega$ est un invariant relatif, au sens de H. Poincaré, des équations (1), $\int \Omega' dx_{n+1}$ est un invariant absolu du système (2). L'opération (E), appliquée à cet invariant, conduit à un nouvel invariant d'ordre $p+1$, $\int \Omega'_1$, où Ω'_1 est la forme dérivée d'une autre forme symbolique Ω_1 de degré p. L'intégrale $\int \Omega_1$

est alors un invariant relatif du système (2), et, en y remplaçant x_{n+1} et dx_{n+1} par t et dt respectivement, on obtient un invariant relatif complet du système (1). C'est ainsi que l'invariant linéaire relatif complet de M. Cartan peut se déduire de l'invariant relatif de H. Poincaré $\Sigma p_i dq_i$.

ENTOMOLOGIE. — *La métamorphose des femelles et l'hypermétamorphose des mâles chez les Coccides du groupe des Margarodes.* Note de M. **Paul Marchal.**

Giard et Valéry Mayet ont attiré l'attention sur les curieuses particularités que présentent les transformations des Margarodes et en particulier du *Margarodes vitium* Gd., vivant au Chili sur les racines de la vigne. Depuis, plusieurs auteurs, tels que Green et Silvestri, ont, pour d'autres espèces, apporté des contributions diverses à l'histoire de ces Insectes.

On sait que la femelle adulte qui rappelle superficiellement, par la forme générale de son corps et la pilosité de ses téguments, certaines larves de Lamellicornes, est surtout caractérisée par l'absence complète de bouche et par la conformation des pattes de la première paire, qui sont adaptées pour fouir et transformées en griffes puissantes.

Elles pondent des œufs en s'entourant d'une masse filamenteuse sécrétée par des glandes cutanées, et de ces œufs naissent des larves primaires hexapodes, très différentes des adultes, et qui paraissent assez variables suivant les espèces.

Les stades successifs qui conduisent jusqu'à la femelle adulte n'ont été suivis que d'une façon incomplète. On sait pourtant que la plus grande partie de la vie des Margarodes se passe sous une forme apode et sphérique à cuticule épaissie, qui prend place entre la première larve hexapode et la forme femelle adulte également hexapode. C'est sous cette forme apode, rappelant l'aspect d'une pilule, que la Cochenille grandit, fixée aux racines des végétaux par ses soies rostrales. Elle est alors entourée d'une enveloppe blanche et nacrée, formée d'écailles sécrétées par l'Insecte et des mues qu'il abandonne au cours de sa croissance [1].

C'est à cette enveloppe d'aspect nacré, dont l'origine et la nature sont encore imparfaitement connues, que les Margarodes, souvent appelés *perles de terre*, doivent le nom sous lequel on les désigne.

---

[1] A. Giard, *Troisième Note sur les Margarodes* (*C. R. Soc. Biol.*, t. 46, 1894, p. 710).

D'après Giard, lorsque la larve qui se trouve à l'intérieur de cette enveloppe et qu'il appelle *larve-pupe* est arrivée à toute sa croissance, l'Insecte passe par un véritable stade nymphal, au cours duquel on peut observer tous les phénomènes d'histolyse et d'histogenèse que l'on constate chez les nymphes des Insectes holométaboles. Sous l'influence de la sécheresse, il peut y avoir, à ce stade, arrêt du métabolisme (anhydrobiose) et l'Insecte, semblable à un véritable kyste, peut suspendre pendant plusieurs années son évolution. En outre, suivant les conditions de nutrition dans lesquelles se trouve la larve-pupe, celle-ci pourrait se transformer en femelle adulte à des tailles très différentes. Certaines femelles de *Margarodes vitium* ne dépasseraient pas 2^{mm}, tandis que d'autres atteindraient 5^{mm} à 8^{mm} de longueur. Souvent on pourrait ainsi trouver des femelles adultes plus petites que certaines larves ([1]).

Quant au développement du mâle, il est resté jusqu'ici inconnu, chez toutes les espèces décrites de Margarodes.

N'ayant pas observé le développement du *Margarodes vitium*, je ne puis me prononcer sur la nature des phénomènes marquant les dernières phases de la métamorphose chez cette espèce. Mais ce que je puis avancer, c'est que chez une espèce nouvelle, le *Neomargarodes Trabuti* ([2]), que j'ai

---

([1]) A. Giard, *loc. cit.*

([2]) Je dois tout le matériel concernant cette espèce à l'obligeance de M. Bois, professeur au Muséum, et du Dr Trabut, directeur du Service botanique à Alger. Ils ont recueilli les premiers échantillons qui m'ont été remis, à El-Arfiane, près de Tougourt, dans le Sud-Algérien, sur une plante désertique, le *Limoniastrum guyonianum*. Depuis, le Dr Trabut me fit des envois réguliers de rameaux de *Limoniastrum* chargés de kystes de Margarodes aux diverses époques de l'année pour me permettre d'en suivre l'évolution. Les kystes encroûtés de sable occupent la base des rameaux et toutes les parties qui sont plus ou moins couvertes de sable amoncelé.

Je donnerai la description sommaire suivante de ce *Margarodidæ* que je rattacherai, tout au moins provisoirement, au genre *Neomargarodes* de Green :

Neomargarodes Trabuti nov. sp.

Male. — Longueur 4^{mm} à 5^{mm}. Coloration générale rosée avec sclérites jaunes ou bruns; yeux composés rouges. Antennes de sept articles, les quatre premiers courts et n'égalant pas ensemble la moitié de la longueur formée par les trois suivants; quatrième d'une longueur à peu près double du troisième et portant du côté ventral un appendice vésiculaire garni de nombreuses et courtes soies sensorielles.

Les cinquième, sixième et septième articles, cylindriques de longueur légèrement croissante; le cinquième et, à un degré moindre, le sixième, se prolongeant légèrement du côté ventral, au-dessous de l'articulation, en s'élargissant graduellement, mais sans constituer des processus lamelleux comparables à ceux que porte sur les mêmes

étudiée sur un abondant matériel recueilli en Algérie, ces phénomènes se passent, sur divers points, d'une façon fort différente.

Chez le *Neomargarodes Trabuti*, on constate, comme chez le *Margarodes vitium :* 1° l'existence d'une larve primaire hexapode; 2° l'existence d'une larve apode kystoïdale entourée d'une enveloppe nacrée, fixée sur la plante par ses soies rostrales et qui s'accroît par succion de la sève; 3° une croissance s'arrêtant à des tailles très différentes de la forme précédente pour permettre la transformation de la larve apode en une forme hexapode pourvue de grosses griffes antérieures fouisseuses et ayant l'aspect larvaire melolonthoïde bien connu des femelles adultes de Margarodes; les petits exemplaires sortant des petits kystes n'ont guère plus de 2^{mm} de long, tandis que les gros exem-

---

articles le type du genre *Neomargarodes* (*N. erythrocephala* Green). Patte antérieure robuste et conformée pour fouir, le tibia, le tarse et la griffe étant fusionnés, de façon à former un puissant crochet terminal. Ailes larges, dépassant l'abdomen en arrière, bord costal assez fortement denté dans sa région médiane. Deux paires de stigmates thoraciques. Huit paires de stigmates abdominaux. Septième segment abdominal portant sur sa région dorsale une fente transversale sur les lèvres de laquelle débouchent des tubes glandulaires (7 à 9 sur la lèvre supérieure, 10 à 12 sur la lèvre inférieure), donnant insertion à de longues baguettes transparentes ayant l'aspect de verre filé; groupées ensemble elles forment une longue aigrette qui émerge de la partie dorsale de l'abdomen et dont la longueur dépasse le double de ce dernier. Appendice copulateur de longueur environ égale à celle de l'abdomen.

Femelle. — Longueur 8^{mm} à 10^{mm}, ovalaire. Téguments garnis de longues soies capillaires et jaunâtres. Antennes courtes de six articles, premier article large tronconique, les cinq suivants de largeur graduellement décroissante; deuxième, troisième et quatrième beaucoup plus larges que longs, et annulaires; quatrième et cinquième un peu plus longs que ceux qui précèdent; le sixième et dernier presque hémisphérique, chaque article portant un cercle de longues soies; yeux rouges punctiformes, en arrière des antennes. Patte antérieure très large; fémur fort et quadrangulaire; griffe très robuste et courte formée par le tibia, le tarse et l'ongle fusionnés, le bord interne étant profondément sinué en forme de S.

Ongles des pattes intermédiaires et des pattes postérieures falciformes, finement acérés, très allongés, de longueur égalant environ quatre fois celle du tarse et à peu près égale à celle du fémur. Deux grands stigmates thoraciques et huit stigmates abdominaux.

Stades évolutifs du male. — *Larve du premier stade.* — Très analogue à celle de la femelle (voir ci-après).

Larve du deuxième stade. — Très analogue à celle de la femelle (voir ci-après).

Larve du troisième stade. — Très analogue à la femelle adulte mais de taille plus petite, pas d'orifice sexuel.

Nymphe. — Blanche, avec régions céphalothoracique et abdominale nettement séparées par un étranglement; pattes et antennes bien développées, pattes antérieures

plaires sortant des gros kystes peuvent avoir jusqu'à 9^{mm}. A part la différence de grandeur, ceux de petite taille et ceux de grande taille semblent d'ailleurs identiques et ont les mêmes allures, se déplaçant par un mouvement d'ondulation et de reptation rapide. Mais la succession des phénomènes devient ensuite très différente, suivant qu'il s'agit de la petite forme ou de la grande forme. En effet, tandis que cette dernière est la femelle adulte, la petite forme qui lui est pourtant morphologiquement si semblable n'est que le dernier stade larvaire du mâle. Cette larve mâle gynécoïde, après avoir erré pendant quelque temps, s'ensable ou se réfugie sous un abri, et s'entoure d'une coque filamenteuse dans laquelle elle s'immobilise, puis se transforme en une nymphe pourvue d'antennes, de pattes et de moignons alaires, qui rejette en arrière d'elle la mue larvaire formée par les tégu-

---

fouisseuses dirigées en avant et rapprochées l'une de l'autre en semblant constituer une sorte de rostre. Moignons alaires bien développés sous forme de palettes arrondies à l'extrémité.

Stades évolutifs de la femelle. — *Larve de premier stade.* — Antennes de six articles, le dernier le plus long et fortement renflé en massue, tronqué obliquement du côté externe et portant à ce niveau quelques soies et bâtonnets sensoriels. Première patte forte, bien plus courte que les suivantes, hanche très courte, fémur large et quadrangulaire dépassant en longueur l'ensemble des articles suivants, griffe amincie vers la base, élargie et excavée vers l'extrémité. Deuxième et troisième pattes longues et grêles terminées par une longue griffe falciforme, mais faiblement incurvée, mesurant environ les $\frac{2}{3}$ du tarse. Rostre bien développé avec labium placé en avant d'un tentorium large et robuste, soies rostrales décrivant une longue boucle à l'intérieur du corps. Deux très longues soies à l'extrémité postérieure du corps.

Larve du deuxième stade. — Apode et sphérique d'un diamètre de 1^{mm} à 1^{mm},75, entourée d'une coque écailleuse et nacrée, enrobée elle-même de sable agglutiné; coloration d'un marron plus ou moins foncé et cuticule plus ou moins épaisse, suivant le degré d'évolution. Petit rostre conique, soies rostrales longues et bien développées; antennes rudimentaires et représentées par deux petites tubercules portant plusieurs papilles et deux ou trois courtes soies. Taches oculaires d'un rouge foncé, apparentes surtout sur les individus jeunes à cuticule peu teintée. Deux paires de très gros stigmates thoraciques et huit paires de stigmates abdominaux, le diamètre de ces derniers diminuant d'avant en arrière et le dernier voisin de l'anus étant beaucoup plus petit que les autres. Sur la face ventrale, de chaque côté, du deuxième au sixième segments abdominaux, une série de glandes cutanées avec petits cercles chitineux et une glande semblable médiane un peu plus en avant. Sur la ligne médiane dorsale et en arrière, une série de huit petits cercles transparents au niveau desquels la cuticule est amincie.

Larve du troisième stade. — Stade très analogue au précédent dont il est séparé par une mue, mais de taille plus forte, le diamètre pouvant atteindre 6^{mm}. Glandes ciripares des vestibules stigmatiques plus nombreuses.

ments épaissis du stade précédent. La nymphe se transforme ensuite, probablement au moyen de deux mues successives, en Insecte ailé.

Le mâle adulte, pourvu lui-même de pattes fouisseuses, s'accouple avec la femelle beaucoup plus volumineuse que lui, tantôt à la surface du sol, tantôt à une faible profondeur dans le sable qu'il déplace rapidement avec ses griffes antérieures. Les femelles fécondées s'ensablent définitivement et, s'entourant d'une sécrétion filamenteuse, pondent un amas d'œufs blancs et ovoïdes.

Il résulte de ce qui précède que les Margarodes mâles et femelles passent identiquement par les trois formes adaptatives suivantes : 1° larve primaire hexapode et migratrice destinée à gagner la plante nourricière; 2° larve apode et kystoïdale consacrée à la croissance et secondairement adaptée à la vie fixée sur le végétal; 3° forme hexapode, astome et fouisseuse d'aspect larvaire mélolonthoïde. Tandis que la femelle est néoténique et arrête son évolution à cette forme larvaire, le mâle continue à évoluer pour arriver après deux ou trois autres mues à la forme ailée, en réalisant un exemple remarquable d'hypermétamorphose.

L'hypermétamorphose des Margarodes est caractérisée d'un côté par le trimorphisme larvaire qui vient d'être décrit, d'un autre côté par deux phases d'arrêt de l'activité extérieure, qui permettent la constitution de nouveaux organes et l'élimination de ceux qui deviennent hors d'usage (pièces buccales, etc.), ces phénomènes paraissant toutefois se manifester d'une façon moins complète que chez les Insectes des ordres holométaboles (1). Le premier arrêt correspond à la fin du deuxième stade, lorsque l'Insecte cesse de se nourrir avec ses soies rostrales et qu'à son intérieur va se constituer la larve mélolonthoïde fouisseuse d'aspect extérieur semblable à la femelle adulte. Cet arrêt, au cours duquel l'Insecte se trouve dans les conditions d'un véritable kyste, se trouve aussi bien dans l'évolution du mâle que dans l'évolution de la femelle (2) et tout au moins chez certaines espèces telles que *Margarodes vitium*, il est susceptible en frappant les phé-

(1) Sans avoir fait encore une étude complète des phénomènes internes de la métamorphose chez les Margarodes, j'ai pourtant constaté par la dissection des larves apodes (troisième stade de la femelle) et des femelles adultes que la destruction des organes est beaucoup moins grande que celle qui existerait, d'après Giard, chez les larves similaires (larves-pupes) du *Margarodes vitium*. Le tube digestif, en particulier, persiste en entier, bien que la bouche fasse totalement défaut chez l'adulte.

(2) Pour la femelle, en raison d'une mue de croissance supplémentaire, il se trouve toutefois reporté à la fin du troisième stade.

nomènes internes du métabolisme, de se prolonger pendant des années sous l'influence de la sécheresse (hypnodie, anhydrobiose). Chez le *Neomargarodes Trabuti*, il m'a paru se confondre avec la période d'hivernation.

Le deuxième arrêt ne se rencontrant que dans l'évolution du mâle correspond à la phase de nymphose des Insectes holométaboles, et est nécessité par la transformation de la larve mélolonthoïde en Insecte ailé.

PHYSIQUE. — *Cheminement capillaire, diffusion et déplacement.* Note de M. **Louis Lumière**.

Lorsqu'on dispose verticalement une bande d'un tissu quelconque, préalablement mouillé, de telle manière que son extrémité supérieure soit repliée et plonge dans une cuvette contenant de l'eau, on constate bientôt que cette eau, qui forme une nappe apparemment continue, chemine dans les interstices capillaires que laissent les fibres entre elles, pour venir finalement se résoudre en gouttelettes à l'extrémité inférieure.

On réalise ainsi une sorte de siphon présentant cette particularité qu'il ne possède aucune enveloppe extérieure.

Le phénomène se manifeste avec toutes les substances poreuses : tissus, papiers, etc., composés de fibres organiques ou minérales et avec tous les liquides susceptibles d'en mouiller les éléments constitutifs.

Ce cheminement, aussi lent qu'on le désire, d'une lame liquide suivant sa surface, m'a semblé susceptible de recevoir diverses applications et l'expérience, ainsi qu'on le verra plus loin, a pleinement justifié cette hypothèse.

Avant de décrire quelques-unes de ces applications, je crois devoir exposer les résultats de mesures de vitesses d'écoulement qui permettent de préciser, dans de certaines limites, les conditions de fonctionnement de cette sorte de siphon.

Il convient de remarquer que la nature, la finesse et le degré de serrage des fibres du support ainsi que la densité, la viscosité et la tension superficielle du liquide considérés exercent une grande influence sur la vitesse d'écoulement qui est toujours très faible par rapport à celle qui correspondrait à la chute libre.

Le Tableau suivant donne les volumes débités par minute et par centimètre de largeur ainsi que les vitesses linéaires de cheminement en centimètre *par minute*, pour diverses hauteurs de chute, dans le cas d'un tissu de coton croisé particulièrement intéressant et dans celui d'un papier buvard épais, le liquide employé étant de l'eau.

Hauteurs de chute en centimètres.	Volume débité en cm³ par minute et par centimètre de largeur.	Vitesse linéaire en centimètres par minute.
	Tissu de coton croisé. Épaisseur apparente à sec = 0mm,4.	
cm	cm³	cm
5	0,045	1
10	0,057	1,3
20	0,061	1,42
40	0,061	1,42
	Papier buvard. Épaisseur apparente à sec = 0mm,3 (¹).	
1,5	0,02	0,25
3	0,026	0,33
6	0,026	0,33
12	0,226	0,33

Fig. 1

La figure 1 traduit ces résultats sous forme de courbes qui montrent que la vitesse d'écoulement tend à devenir constante à partir d'une hauteur de chute très faible qui est, pratiquement, de 20cm pour le tissu et de 3cm seulement pour le papier buvard employés.

Il n'y aura donc aucun intérêt à dépasser ces valeurs, lorsqu'on utilisera ces substances comme supports de la lame liquide.

(¹) L'épaisseur apparente augmente beaucoup par l'effet du mouillage dans le cas du papier buvard qui subit une sorte de gonflement.

Les vitesses correspondantes en chute libre ($V = \sqrt{2gh}$) seraient respectivement de 198^{cm} et 76^{cm} *par seconde*, c'est-à-dire 8366 et 13818 fois plus grandes.

Applications. — 1° *Élimination des sels solubles retenus par la couche de gélatine des plaques photographiques au cours des manipulations.* — La première tentative d'utilisation se rapporte au lavage des phototypes sur verre au sortir du bain de fixage.

J'ai, dans ce but, construit le dispositif très simple représenté par la figure 2.

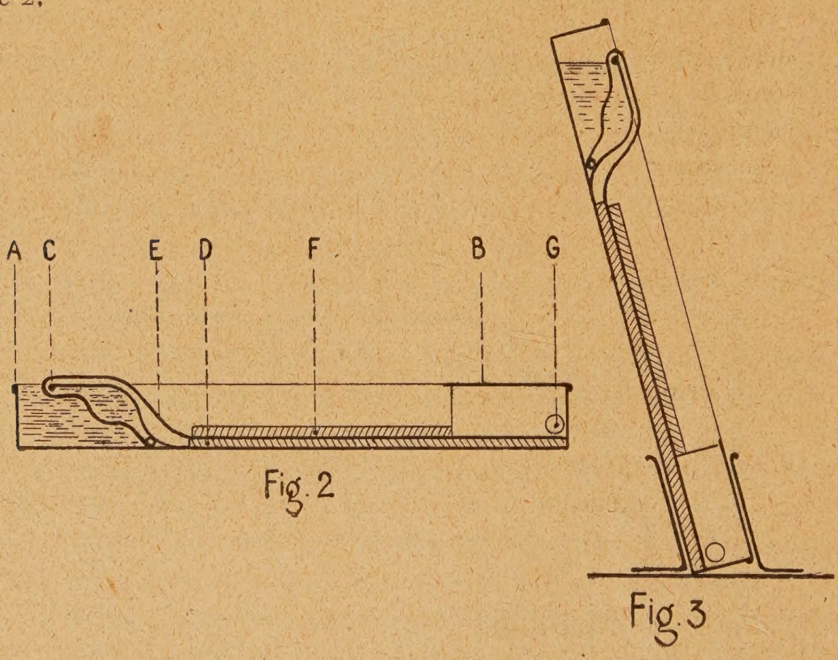


Fig. 2

Fig. 3

Une cuvette métallique A présentant en B un recouvrement est divisée en deux parties par la paroi incurvée C afin de constituer un petit réservoir. Le fond de la cuvette supporte une lame de verre D et une bande de tissu de coton E, assez longue pour plonger jusqu'au fond du réservoir, est appliquée sur toute la surface, comme le montre la figure. Enfin une tubulure G permet le vidage.

Pour utiliser l'appareil, on remplit d'eau le réservoir, puis on applique le phototype à laver F, la couche de gélatine en contact avec le tissu que l'on a pris soin de mouiller préalablement sur toute sa surface. Il convient aussi de laisser une mince couche d'eau sur le fond de la cuvette avant d'y placer la plaque, afin d'éviter l'interposition de bulles d'air. On relève ensuite l'appareil, comme le montre la figure 3. La petite quantité d'eau laissée,

ainsi qu'il vient d'être dit, s'écoule par la tubulure G et la plaque se maintient en place sous l'action de la pression atmosphérique [1].

L'eau du réservoir, siphonnée par le tissu, chemine lentement en une nappe mince qui, par diffusion, se charge de sels retenus par la couche de gélatine et l'on constate que, dans le cas d'une plaque $9^{cm} \times 12^{cm} (S = 108c^2)$, l'élimination des sels est pratiquement complète après 12 à 15 minutes, la consommation d'eau atteignant à peine 30^{cm^3}.

La possibilité d'effectuer le lavage avec une quantité d'eau aussi faible permettra, par l'addition de quelques minimes fragments de glace dans le réservoir, d'opérer à basse température et d'éviter les accidents fréquemment observés pendant l'été.

Il est facile de se rendre compte, *de visu*, du fonctionnement du dispositif en plaçant dans la cuvette une plaque de verre recouverte de gélatine que l'on imprègne d'un liquide coloré n'exerçant pas d'action sur la gélatine. Une solution concentrée de $K^2Cr^2O^7$ est dans ce cas. Après avoir relevé la cuvette ainsi qu'il est exposé plus haut, on voit s'effectuer progressivement la décoloration, et celle-ci devient complète en moins d'un quart d'heure.

2° *Lavage des précipités.* — A la suite de nombreuses expériences, je me suis arrêté au dispositif suivant, qui me semble répondre à tous les desiderata.

Sur une plaque de glace plane A (*fig.* 4), on place une bande B de tissu de coton croisé par exemple, préalablement mouillé, dépassant l'extrémité de la glace d'une longueur de 20^{cm} environ, qu'on laisse pendre verticalement comme le montre la figure. On pose ensuite sur ce tissu, en appuyant un peu, une sorte de cadre C (*fig.* 5) en ébonite, verre ou porcelaine, de 5^{mm} à 10^{mm} d'épaisseur ou plus, même. L'ensemble constitue une cuvette dont le fond est tapissé par le tissu B et dans laquelle on verse le liquide contenant le précipité, puis on étale sur le cadre une deuxième bande de tissu D dont une extrémité plonge dans la cuvette E contenant le liquide de lavage. Le niveau de celui-ci, maintenu constant à l'aide d'un flacon de Mariotte, doit être à 1^{cm} au-dessous du bord de ladite cuvette et à 2^{cm} ou 3^{cm} au-dessus du plan de la surface supérieure du cadre. On fera varier ces hauteurs avec la nature et l'épaisseur du support de la lame liquide de façon que la quantité de liquide apportée en D ne soit jamais supérieure à celle entraînée en B.

---

[1] Celle-ci tend à provoquer, à la surface de la couche, l'empreinte permanente des fibres du tissu. On évitera cette altération superficielle en faisant usage d'un bain de fixage aluné qui durcira la gélatine.

Enfin, on met en place la plaque de glace F (dépolie pour faciliter le mouillage de sa surface), en évitant, autant que possible, d'emprisonner de l'air.

Le précipité se trouve ainsi logé dans une cellule fermée et qui est traversée de haut en bas par un courant très lent provoqué par la succion qui s'exerce du fait du cheminement du liquide dans la bande B. Le liquide

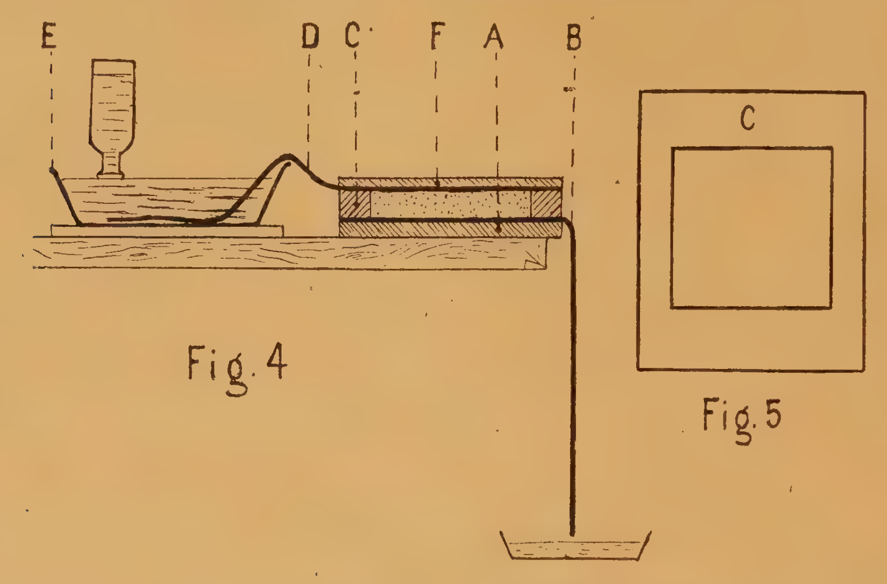


Fig. 4

Fig. 5

venant de D se substitue petit à petit, dans la masse du précipité, à la solution qui contenait les sels solubles à éliminer et, lorsqu'il s'est écoulé un volume correspondant à deux fois environ la capacité de la cellule, le lavage est pratiquement complet.

Il ne reste plus qu'à retirer la glace F et le tissu D pour permettre l'essorage du précipité, le liquide qui l'imprègne étant aspiré assez énergiquement par la nappe B. Après quelques instants, on enlève le cadre C et l'on peut recueillir facilement ce précipité sous forme d'une pâte épaisse.

Le volume de liquide consommé ainsi que la durée de l'opération varient, naturellement, avec la nature du précipité, l'épaisseur et la perméabilité du tissu et la hauteur de chute adoptées.

A titre d'indication, une cellule de $5^{cm} \times 5^{cm}$ et de 1^{cm} de hauteur, soit 25^{cm^3}, permet, au moyen du tissu de coton croisé signalé précédemment, d'obtenir en 1 heure et demie le lavage complet du précipité remplissant ladite cellule et ce, avec une consommation d'eau de 50^{cm^3} environ.

On suivra la marche de l'opération soit en effectuant une réaction de contrôle sur le liquide qui s'écoule à l'extrémité inférieure de la bande B, soit en faisant des touches sur le tissu, au sortir de la cellule, avec une

solution susceptible de donner une réaction colorée, lorsqu'une telle réaction sera possible.

3° *Obtention d'extraits.* — Le dispositif représenté (*fig.* 4) est également applicable à l'extraction, par un solvant approprié, de substances solubles accompagnant une matière solide quelconque. Il convient de remarquer que celle-ci peut être préalablement réduite en poudre très fine, ce qui facilitera l'extraction sans présenter l'inconvénient de troubler la solution recueillie, le cheminement du liquide dans les interstices capillaires de la bande B assurant une excellente filtration.

On réglera la durée de contact par le choix du tissu ou du papier employé ainsi que par la hauteur de chute, c'est-à-dire la longueur de la bande B.

Les quelques exemples qui précèdent montrent l'intérêt économique de la méthode.

Celle-ci est facilement applicable à des opérations industrielles à l'aide d'un matériel très simple, qu'il suffira de modifier pour l'adapter à chaque cas particulier.

Le Prince **Bonaparte** fait hommage à l'Académie du 12e fascicule de ses *Notes Ptéridologiques*, qu'il vient de publier et qui contient un Mémoire de M. **Christensen**, consacré à l'étude d'un groupe de fougères d'Afrique, dit *Microgonium*. Sur les 9 espèces et 3 variétés étudiées, 6 sont nouvelles, ainsi que les 3 variétés; 30 figures accompagnent les descriptions. Les échantillons ont été récoltés à Madagascar par un sagace collecteur M. **H. Perrier de la Bâthie**.

CORRESPONDANCE.

M. **René Baire**, élu Correspondant pour la Section de Géométrie, adresse des remercîments à l'Académie.

GÉOMÉTRIE. — *Sur les surfaces cerclées.* Note [1] de M. **E. Vessiot**.

1. *Invariants différentiels d'une surface cerclée.* — J'ai défini précédemment, pour chaque cercle générateur d'une surface cerclée, deux sphères

(1) Séance du 10 avril 1922.

centrales et leurs adjointes, et associé à ce cercle le pentasphère orthogonal Π constitué par ces quatre sphères et par la sphère orthogonale au cercle générateur et au cercle infiniment voisin. J'ai de plus introduit deux variables à caractère invariant, dont l'une, θ, définit les points d'un même cercle générateur; et dont l'autre, σ, qui a pour différentielle l'angle d'un cercle générateur avec le cercle infiniment voisin, définit les cercles de la surface. L'étude de la variation du pentasphère Π, quand la valeur correspondante de σ varie, conduit aux invariants différentiels fondamentaux de la surface.

Pour le montrer, introduisons des coordonnées pentasphériques et des notations vectorielles : toute sphère c, de coordonnées $c_1, c_2, \ldots, c_5$, équivaudra à un vecteur c, de composantes $c_1, c_2, \ldots, c_5$, et l'on supposera

$$c^2 = \sum_k c_k^2 = 1;$$

le cosinus de l'angle de deux sphères c et c' sera égal au produit scalaire $cc' = \sum_k c_k c'_k$. Si ces sphères varient d'une manière continue,

$$dc^2 = \sum_k dc_k^2$$

est le carré de l'angle de c avec la sphère infiniment voisine. Si c et c' sont orthogonales, $c'\,dc = \sum_k c'_k\,dc_k$ est le complément de l'angle que fait avec c' la sphère infiniment voisine de c. C'est ce qu'on peut appeler, pour faciliter le langage, la *rotation propre* (infinitésimale) du couple (c, c'); car, dans le cas où les sphères deviennent des plans, cet élément est égal à la projection orthogonale de la rotation infinitésimale (euclidienne) du dièdre qu'ils forment sur l'arête de ce dièdre.

Soient donc p, p' les sphères centrales, q, q' leurs adjointes, r la sphère orthogonale. La variation infinitésimale du pentasphère Π est définie par un système différentiel (analogue à celui que donnent les *formules de Serret-Frenet*), qui s'écrit, sous forme vectorielle,

$$(\mathrm{S})\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{dp}{d\sigma} = q\cos k + p'\mathrm{P}, & \dfrac{dp'}{d\sigma} = q'\sin k - p\mathrm{P}, & \dfrac{dr}{d\sigma} = -q\mathrm{R} - q'\mathrm{R}', \\ \dfrac{dq}{d\sigma} = -p\cos k + q'\mathrm{Q} + r\mathrm{R}, & \dfrac{dq'}{d\sigma} = -p'\sin k - q\mathrm{Q} + r\mathrm{R}'. & \end{array}\right.$$

L'invariant k, du premier ordre, a été défini dans ma première Note; les

invariants P, Q, R, R′, du second ordre, sont les vitesses de rotation propre (relatives à σ) des couples (p, p'), (q, q'), (q, r), (q', r).

Tous les invariants différentiels de la surface s'expriment au moyen des *invariants fondamentaux* [1] k, P, Q, R, R′ et de leurs dérivées successives par rapport à σ; et les formules qui donnent ces cinq invariants en fonction de σ sont les *équations intrinsèques* de la surface (S). Ce sont là des conséquences immédiates de l'existence du système. Les surfaces qui correspondent à un même système d'équations intrinsèques (égales entre elles au point de vue conforme) sont fournies par l'intégration de ce système.

Ce système (S) est un *système de Lie*, dont le groupe associé est le groupe orthogonal à cinq variables; on peut en ramener l'intégration à celle d'un système de Lie d'ordre 3, dont le groupe associé est le groupe projectif d'un complexe linéaire. Dans le cas $R = R' = 0$, où les cercles générateurs sont orthogonaux à une sphère fixe, le système (S) se réduit à un système d'ordre 4, dont le groupe associé est le groupe orthogonal à quatre variables, et l'intégration se ramène à celle de deux équations de Riccati [2].

2. *Géométrie sur une surface cerclée.* — Un point m de la surface étant défini par ses coordonnées curvilignes σ, θ, ses coordonnées pentasphériques sont données par la formule vectorielle

$$m = r\, iq \sin\theta + iq' \cos\theta,$$

et la sphère v passant par le cercle générateur, qui est tangente à la surface en ce point, est

$$v = \frac{p\cos\theta\sin k + p'\sin\theta\cos k}{K},$$

avec

$$K^2 = \cos^2\theta\sin^2 k + \sin^2\theta\cos^2 k.$$

Toute la géométrie sur la surface est fondée sur les deux formes quadratiques différentielles dm^2 et $dm\,dv$, dont les expressions sont, en fonction des invariants,

$$dm^2 = -Z^2 - K^2 d\sigma^2,$$

avec

$$Z = H\,d\sigma + d\theta, \qquad H = Q - iR\cos\theta - iR'\sin\theta,$$

$$dm\,dv = \frac{-i}{K}(2\sin k\cos k Z\,d\sigma + L\,d\sigma^2),$$

---

[1] Un autre système d'invariants fondamentaux, mais peu maniable, a été calculé par intégration, au moyen des méthodes de Lie, par M. Basserve, dans sa thèse (Paris, 1915).

[2] J'ai étudé ces questions d'intégration dans une Note des *Comptes rendus* (8 février 1909).

avec

$$L = K^2 P - H \sin k \cos k - \frac{dk}{d\sigma} \sin\theta \cos\theta.$$

La forme dm^2 est proportionnelle au ds^2 de la géométrie euclidienne, qu'elle remplace pour les relations angulaires; en particulier, $Z = 0$ est l'équation différentielle des *trajectoires orthogonales* des cercles générateurs.

La forme $dm\,dv$ s'introduit dans la théorie de la courbure : la formule vectorielle

$$w = \rho m + v, \quad \text{où} \quad \rho = -\frac{dm\,dv}{dm^2},$$

définit la *sphère de courbe normale* w, c'est-à-dire celle qui passe en m et a pour centre le centre de courbure normale de la courbe considérée.

La formule qui donne, d'une manière analogue, la *sphère de courbure géodésique* (passant par m et ayant pour centre le centre de courbure géodésique de la courbe) ne fait intervenir que les coefficients de dm^2 et leurs dérivées. Elle se rattache à l'équation des géodésiques de l'élément dm^2.

Le faisceau des sphères dm remplace les plans normaux de la géométrie euclidienne; c'est ainsi que les géodésiques du dm^2 sont les courbes qui, en chacun de leurs points, ont un contact commun du second ordre avec une de ces sphères.

L'équation différentielle des lignes de courbure est

$$\sin k \cos k (Z^2 - K^2 d\sigma^2) + LZ\, d\sigma = 0.$$

Le premier membre est le numérateur de l'expression Θds, où Θ est la *torsion géodésique;* le dénominateur est $i K^2 \sqrt{dm^2}$.

Cet élément $\Theta\, ds$ est, pour toute surface, un invariant conforme, car c'est la rotation propre (infinitésimale) du couple orthogonal formé par la sphère de courbure normale et la sphère de courbure géodésique.

GÉOMÉTRIE. — *Sur les équations de structure des espaces généralisés et l'expression analytique du tenseur d'Einstein.* Note de M. E. **Cartan**, présentée par M. Hadamard.

Dans quatre Notes récentes [1], j'ai indiqué comment on pouvait étendre la notion habituelle d'espace courbe. Dans le langage des géomètres modernes, l'expression « espace euclidien » désigne un réceptacle de corps

---

[1] *Comptes rendus*, t. 174, p. 437, 593, 734 et 857.

dits rigides, dont les déplacements forment un certain groupe; un des éléments essentiels de ce groupe est sa *structure*; c'est la loi de composition des déplacements. L'espace non euclidien de Lobatschefsky est de même caractérisé par un groupe, mais de structure différente. Si l'on considère maintenant une surface plongée dans l'espace euclidien, c'est un continuum à deux dimensions sur lequel il n'existe plus de déplacements de corps rigides (à deux dimensions); néanmoins, il est resté à ce continuum une partie, mais une partie seulement, des propriétés infinitésimales de l'espace euclidien : on peut définir la distance de deux points infiniment voisins et l'angle de deux directions issues d'un même point. En passant de l'espace euclidien à la surface, la notion d'espace, *considéré comme support de déplacements se combinant suivant certaines lois*, s'est donc appauvrie et il reste trace de cet appauvrissement dans la notion habituelle d'espace courbe.

M. Levi-Civitâ, en définissant le transport par parallélisme dans une variété de ds^2 donné, a, au fond, donné un sens à l'expression « translation infiniment petite », permettant ainsi de regarder la variété comme un espace, c'est-à-dire un support de déplacements (infiniment petits); seulement ces déplacements n'engendrent plus un groupe. Si maintenant on définit ces déplacements de la manière la plus générale possible, *le ds^2 n'enferme plus toute la réalité géométrique de l'espace*. Analytiquement, dans l'un et l'autre cas, on peut définir l'espace par ses *équations de structure*.

La structure de l'espace euclidien, c'est la structure du groupe des déplacements euclidiens. Du point de vue de S. Lie, elle s'obtient par la considération des transformations infinitésimales du groupe. Le point de vue que j'ai introduit dans la théorie des groupes continus est différent et peut être présenté ici géométriquement. Imaginons l'ensemble de tous les trièdres trirectangles qui dépendent de six paramètres $x_1, \ldots, x_6$, dont les trois premiers x_1, x_2, x_3 seront les coordonnées (cartésiennes ou curvilignes) de l'origine. On peut passer d'un de ces trièdres (T) à un trièdre infiniment voisin (T′) par un déplacement infiniment petit, réductible à une translation et une rotation. Les composantes ω_1, ω_2, ω_3, *suivant les axes du trièdre* (T), de cette translation, et les composantes

$$\omega_{23} = -\omega_{32}, \qquad \omega_{31} = -\omega_{13}, \qquad \omega_{12} = -\omega_{21},$$

suivant les mêmes axes, de la rotation sont, les trois premières, linéaires en dx_1, dx_2, dx_3, les trois dernières linéaires en $dx_1, \ldots, dx_6$, les coefficients des différentielles dépendant eux-mêmes des six variables x_i. Les expressions de Pfaff ω_i, ω_{ij} ne sont pas arbitraires; elles satisfont aux rela-

tions classiques relatives aux déplacements à plusieurs paramètres ([1]), qu'on peut condenser sous la forme suivante :

$$d\omega_i^\delta - \delta\omega_i^d = \sum_k (\omega_k^d \omega_{ki}^\delta - \omega_k^\delta \omega_{ki}^d), \qquad d\omega_{ij}^\delta - \delta\omega_{ij}^d = \sum_k (\omega_{ik}^d \omega_{kj}^\delta - \omega_{ik}^\delta \omega_{kj}^d),$$

(d, δ, symboles de différentiation) ou, plus simplement encore,

$$(1) \qquad \omega_i' = \sum_k [\omega_k \, \omega_{ki}], \qquad \omega_{ij}' = \sum_k [\omega_{ik}\omega_{kj}].$$

Ce sont les équations de structure de l'espace euclidien.

Ces équations peuvent être interprétées géométriquement. Imaginons un contour fermé (C) et une surface (S) limitée par ce contour. Attachons, suivant une loi arbitraire, à chaque point de (S) un trièdre trirectangle (T) dépendant ainsi de deux paramètres. On a alors, d'après (1),

$$(2) \qquad \int_{(C)} \omega_i = \iint_{(S)} \sum_k \omega_k \omega_{ki}, \qquad \int_{(C)} \omega_{ij} = \iint_{(S)} \sum_k \omega_{ik}\omega_{kj};$$

a première formule par exemple indique comment, au moyen d'une intégrale de surface ne faisant intervenir que les composantes du déplacement instantané à deux paramètres du trièdre (T), on peut calculer l'intégrale de la composante ω_1, suivant l'axe des x mobile, de la translation instantanée du trièdre (T); *la structure de l'espace est définie par la loi suivant laquelle interviennent, dans les intégrales de surface, les composantes du déplacement instantané. Il y a groupe parce qu'il n'y a que des coefficients constants.*

Cela posé, dans un espace euclidien *déformé*, on aura, pour les composantes ω_i, ω_{ij}, des déplacements infiniment petits, des formules analogues à (1), mais non identiques. Elles sont modifiées par l'adjonction de termes complémentaires, qui traduiront la divergence entre l'espace considéré et l'espace euclidien. Les équations de structure prendront la forme

$$(1') \qquad \omega_i' = \sum_k [\omega_k \omega_{ki}] + \Omega_i, \qquad \omega_{ij}' = \sum_k [\omega_{ik}\omega_{kj}] + \Omega_{ij},$$

où les Ω_i et les Ω_{ij} sont des éléments d'intégrales doubles :

$$\Omega_i = \sum_{r,s} A_i^{rs} [\omega_r \omega_s], \qquad \Omega_{ij} = \sum_{r,s} A_{ij}^{rs} [\omega_r \omega_s].$$

([1]) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. I, p. 49 et 66.

Ce sont les composantes d'une translation et d'une rotation infiniment petites associées à un élément arbitraire à deux dimensions de l'espace; les Ω_i définissent la torsion, les Ω_{ij} la courbure de l'espace. Si le ds^2 est donné, la loi de parallélisme de M. Levi-Civita s'obtient en le décomposant de la manière la plus générale possible en une somme de carrés $\Sigma\omega_i^2$ et en déterminant les $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, *ce qui est toujours possible d'une manière et d'une seule*, par les conditions $\omega'_i = \sum_k [\omega_k \omega_{ki}]$.

Dans le cas général, la loi de conservation s'obtient en écrivant que les intégrales de surface des seconds membres de (2), étendues à une surface fermée (S) limitant un volume (V), sont nulles, ce qui donne

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\iint_{(S)} \Omega_i = \iiint_{(V)} \sum_k (\omega_k \Omega_{ki} - \Omega_k \omega_{ki}), \\ &\iint_{(S)} \Omega_{ij} = \iiint_{(V)} \sum_k (\omega_{ik} \Omega_{kj} - \Omega_{ik} \omega_{kj}). \end{aligned} \right.$$

Si l'espace est sans torsion, les seconds membres des trois premières formules sont nulles : cela exprime la loi de symétrie du tenseur courbure.

Dans l'Univers d'Einstein, supposé sans torsion, le vecteur qui représente la quantité de mouvement et l'énergie a pour composantes

$$(4)\qquad \Pi_i = \omega_j \Omega_{kl} + \omega_k \Omega_{lj} + \omega_l \Omega_{jk} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

les indices i, j, k, l formant une permutation paire des indices 1, 2, 3, 4. *Il est remarquable qu'elles ne font pas intervenir explicitement les coefficients* A_{ij}^{kl} (*symboles de Riemann-Christoffel*) *des formes* Ω_{ij}. La loi de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie se traduit par les formules

$$(5)\qquad \iiint \Pi_i = \iiiint \sum_k \omega_{ik} \Pi_k,$$

où les intégrales des seconds membres sont étendues à un domaine quelconque à quatre dimensions de l'Univers, les intégrales des premiers membres au domaine fermé à trois dimensions limitant le premier.

On conçoit que ce qui a été fait pour le groupe euclidien, dont les équations de structure (1) sont déformées en (1′), *peut se répéter pour n'importe quel groupe, fini ou infini.*

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la formule d'interpolation de Newton.* Note [1] de M. N.-E. Nörlund.

Newton a fait remarquer qu'on peut souvent représenter une fonction $\mathcal{F}(z)$ dont on connaît les valeurs dans les points $z = \omega, 2\omega, 3\omega, \ldots$ par une série de la forme

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s(z-\omega)(z-2\omega)\ldots(z-s\omega), \tag{1}$$

où les coefficients a_s ne dépendent pas de z. Cette série a été étudiée par MM. Jensen, Bendixson, Pincherle, Landau et Carlson. Soit ω un nombre positif et posons $z = \sigma + i\tau$. On sait que le domaine de convergence de la série est un demi-plan, limité à gauche par une droite parallèle à l'axe imaginaire. Il existe donc un nombre réel λ tel que la série converge si $\sigma > \lambda$, et diverge si $\sigma < \lambda$. L'abscisse de convergence $\lambda = \lambda(\omega)$ dépend du nombre positif ω. Dans une Note précédente [2], j'ai étudié la formule d'interpolation de Stirling. Le calculateur préfère, en général, se servir de la formule de Stirling parce que les premiers termes de cette formule donnent une meilleure approximation que les premiers termes de la formule de Newton. On pourrait donc être tenté de croire que la convergence de la série de Newton devrait entraîner la convergence de la série de Stirling. Mais il n'en est rien. La série de Newton converge dans des cas beaucoup plus étendus que ne le fait la série d'interpolation de Stirling. On démontre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\mathcal{F}(z)$ se représente par la série (1), c'est qu'elle soit analytique et holomorphe dans un certain demi-plan $\sigma > \lambda$ et y satisfasse à une inégalité de la forme

$$|\mathcal{F}(z)| < e^{k|z|},$$

k étant un nombre positif. Au sujet de la série de Newton, le problème suivant se pose : De quelle manière le domaine de convergence dépend-il de la série des propriétés analytiques de la fonction qu'elle représente ? Pour le voir, considérons la fonction $\mathcal{F}(z)$ sur une droite parallèle à l'axe imaginaire et passant par le point σ. En prenant σ suffisamment grand, on sait trouver

---

[1] Séance du 3 avril 1922.

[2] *Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 919.

un nombre positif k tel que

$$\lim_{\tau=\infty} \mathcal{F}(\sigma \pm i\tau)\, e^{-k\tau} = 0.$$

Soit ξ la borne inférieure des nombres k pour lesquels cette équation est satisfaite. $\xi = \xi(\sigma)$ est une fonction de σ qu'il s'agit d'étudier. On sait trouver un nombre réel α tel que, pour $\sigma > \alpha + \varepsilon$, la fonction $\mathcal{F}(z)$ est holomorphe et la fonction $\xi(\sigma)$ est bornée supérieurement, pendant que l'une au moins de ces conditions cesse d'être satisfaite pour $\sigma > \alpha - \varepsilon$, quelque petit que soit le nombre positif ε. En tenant compte d'un théorème dû à MM. Lindelöf [1] et Phragmén, on démontre qu'il existe un nombre positif β tel que, dans l'intervalle $\alpha < \sigma < \beta$, la fonction $\xi(\sigma)$ est positive, décroissante, continue et convexe pendant qu'elle reste constante pour $\sigma \geqq \beta$.

Cela posé, on démontre l'existence d'un nombre positif ω_1 tel que le développement (1) subsiste pour $0 < \omega < \omega_1$, mais non pour $\omega > \omega_1$. Considérons maintenant l'équation

$$\xi(\sigma) = \frac{\pi}{2\omega}. \tag{2}$$

A la valeur ω_1 de ω cette équation fait correspondre une certaine valeur γ de σ. On aura $\alpha \leqq \gamma \leqq \beta$. Quand σ décroît et tend vers α, la fonction $\xi(\sigma)$ tendra vers une limite finie, soit ξ_0, ou elle augmente indéfiniment. Posons dans le premier cas

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2\xi_0}$$

et dans le second cas

$$\omega_0 = 0.$$

A chaque valeur de ω dans l'intervalle $\omega_0 < \omega < \omega_1$ l'équation (2) fait correspondre une et une seule valeur de σ dans l'intervalle $\alpha < \sigma < \gamma$. *Cette valeur de σ est égale à l'abscisse de convergence $\lambda(\omega)$ de la série* (1). La fonction $\lambda(\omega)$ est donc entièrement déterminée par l'équation

$$\xi[\lambda(\omega)] = \frac{\pi}{2\omega}.$$

Des propriétés de la fonction ξ on conclut que $\lambda(\omega)$ est une fonction continue et croissante à l'intérieur de l'intervalle $\omega_0 < \omega < \omega_1$. Mais elle est discontinue dans le point ω_1. On aura en général $\lambda(\omega_1) > \gamma$ et il arrive

(1) *Acta mathematica*, t. 31, 1908, p. 381-406.

que $\lambda(\omega_1)$ est infiniment grande. Par conséquent, quand ω décroît en partant du point ω_1, l'abscisse de convergence $\lambda(\omega)$ fait d'abord un saut brusque, puis elle décroît continuellement jusqu'à ce que ω arrive dans le point ω_0, enfin elle reste constante et égale à α dans l'intervalle $0 < \omega \leqq \omega_0$. Si $\omega_0 = 0$ l'abscisse de convergence décroît toujours vers α sans atteindre cette limite pour aucune valeur positive de ω.

Considérons, à titre d'exemple, la fonction entière

$$\mathfrak{F}(z) = e^{x^2} \int_x^\infty e^{-t^2} dt,$$

où $x = \frac{1}{2} z \sqrt{i}$. On a ici $\alpha = -\infty$ et l'on démontre que $\lambda(\omega) = -\frac{\pi}{\omega}$.

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur les correspondances ponctuelles de deux surfaces et sur une classe de surfaces analogues aux surfaces isothermiques.* Note de M. **Bertrand Gambier**, présentée par M. Goursat.

1. Dans trois Notes précédentes [1] j'ai étudié, sur deux surfaces S et S_1, diverses correspondances ponctuelles suggérées par les formes quadratiques Σdx^2, $\Sigma dc dx$, Σdc^2 ou, si l'on préfère, par les trois réseaux : lignes de longueur nulle, lignes asymptotiques, courbes de contact des cylindres circonscrits à génératrices isotropes; les lignes de courbure se conservent et *deux* des trois réseaux indiqués sur S se transforment en *deux quelconques* des trois réseaux de S_1. Ces correspondances exigent assez de conditions pour ne pouvoir s'appliquer à une surface S quelconque : elles offrent donc, en compensation, le moyen de définir géométriquement certaines classes de surfaces intéressantes. Dans le même ordre d'idées, en diminuant le nombre de conditions, nous pourrons définir des classes plus générales de surfaces.

Imaginons, par exemple, une correspondance ponctuelle conservant encore les lignes de courbure, mais transformant *un seul* des trois réseaux de S en *l'un quelconque* des trois réseaux de S_1.

2. Diverses combinaisons étant possibles, envisageons le cas où les lignes de courbure et les lignes asymptotiques de S se transforment en les lignes de même nom de S_1 ; on néglige, bien entendu, une similitude effectuée soit sur S, soit sur S_1 ; u, v étant les paramètres des lignes de courbure, S est définie par $\Sigma dc^2 = a^2 du^2 + c^2 dv^2$ et les rayons de courbures principaux R,

(1) *Comptes rendus*, t. 173, 1921, p. 763; t. 174, 1922, p. 523 et 661.

R'; a_1, c_1, R_1, R'_1 sont les éléments correspondants de S_1 et l'on introduit une fonction nouvelle λ telle que

$$c^2 R' = \lambda a^2 R, \qquad c_1^2 R'_1 = \lambda a_1^2 R_1. \tag{1}$$

La surface S étant donnée, a, c, λ sont connues et pour que la surface S_1 existe il est nécessaire et suffisant qu'il existe une solution (a_1, c_1) autre que (a, c) du système

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{a_1}\frac{\partial c_1}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{c_1}\frac{\partial a_1}{\partial v}\right) + a_1 c_1 = 0, \\ &\left(\lambda\frac{a_1^2}{c_1^2} + 1\right)\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log a_1 + \frac{1}{a_1}\frac{\partial a_1}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda\frac{a_1^2}{c_1^2}\right) \\ &\quad = \left(\frac{c_1^2}{a_1^2\lambda} + 1\right)\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log c_1 + \frac{1}{c_1}\frac{\partial c_1}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{c_1^2}{a_1^2\lambda}\right) - \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\lambda. \end{aligned}\right.$$

Pour certaines surfaces S convenablement choisies, le système (2) admet une solution (a_1, c_1) distincte de (a, c) dépendant soit d'un nombre fini (ou nul) de constantes arbitraires, soit de plusieurs fonctions arbitraires d'une variable. Pour un couple solution (S, S_1) la correspondance ponctuelle, en général, est unique; elle peut, dans certains cas, dépendre de un, deux, trois paramètres arbitraires.

A une surface hélicoïdale ou spirale quelconque correspondent indifféremment soit ∞^1 surfaces spirales, soit ∞^1 hélicoïdes et, en négligeant, suivant convention faite, le glissement d'un hélicoïde sur lui-même ou l'autotransformation par similitude de la surface spirale, la correspondance ponctuelle est unique.

3. Il y a lieu de définir ici une classe particulière de surfaces parmi celles que définit cette conception actuelle. Cette classe est définie par une équation unique aux dérivées partielles du quatrième ordre, identique, sauf un coefficient numérique, à l'équation donnée par Weingarten pour les surfaces isothermiques (voir Darboux, *Théorie des surfaces*, t. 2, p. 248); cette classe renferme en particulier les quadriques, les cyclides de Dupin, les surfaces de révolution, les surfaces minima, les surfaces à courbure totale constante (positive ou négative); en dehors de ces solutions très générales, j'ai mis en évidence, par l'intégration d'une équation différentielle du troisième ordre, des surfaces spirales à quatre paramètres de forme. La propriété caractéristique est de pouvoir ramener simultanément les équations des lignes de courbure et des asymptotiques aux formes respectives

$$du\,dv = 0, \qquad du^2 \pm dv^2 = 0. \tag{3}$$

Le changement de v en iv permet de prendre indifféremment soit le signe $+$, soit le signe $-$. Il est bien clair que chacune des substitutions

$$(u, v;\ mu' + n,\ mv' + n_1);\quad (u, v;\ mu' + n,\ -mv' + n_1);$$
$$(u, v;\ mv' + n_1,\ mu' + n);\quad (u, v;\ -mv' + n_1,\ mu' + n)$$

réalise une auto-correspondance du type actuel pour une telle surface, de sorte que deux surfaces quelconques de ce type admettent quatre ∞^3 correspondances ponctuelles de l'espèce étudiée dans cette Note, réelles si les courbures totales ont le même signe, imaginaires dans le cas contraire.

Pour former l'équation aux dérivées partielles annoncée, la surface est définie comme enveloppe du plan

$$(\alpha + \beta)X + i(\beta - \alpha)Y + (\alpha\beta - 1)Z + \xi = 0, \tag{4}$$

où ξ est une fonction de α, β dont p, q, r, s, t sont les dérivées partielles du premier ou second ordre; on pose, pour abréger,

$$z = \frac{\xi - p\alpha - q\beta}{1 + \alpha\beta}, \tag{5}$$

et l'on obtient l'équation

$$2\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\log\frac{r}{t} - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\sqrt{\frac{t}{r}}\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{z + s + \sqrt{rt}}{z + s - \sqrt{rt}}\right] + \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\sqrt{\frac{r}{t}}\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{z + s + \sqrt{rt}}{z + s - \sqrt{rt}}\right] = 0. \tag{6}$$

Si l'on supprime en tête le facteur 2, on a l'équation des surfaces isothermiques donnée par Weingarten.

Sur une surface connue du type actuel, conformément aux principes bien connus de Sophus Lie, de simples quadratures fournissent les lignes de courbure et les lignes asymptotiques. En prenant la forme $du^2 - dv^2 = 0$ pour les asymptotiques, la substitution $u = u_1 + v_1$, $v = u_1 - v_1$, établit, soit sur une seule surface S, soit d'une surface S à une autre surface S_1, une correspondance ponctuelle échangeant cette fois les lignes de courbure en asymptotiques et inversement.

4. Les surfaces isothermiques sont complètement caractérisées par la possibilité de ramener simultanément les équations des lignes de courbure et des lignes de longueur nulle aux formes respectives

$$du\,dv = 0,\qquad du^2 + dv^2 = 0. \tag{7}$$

Si donc dans les formules (3) j'adopte la forme $du^2 + dv^2 = 0$, je définis

entre chaque surface isothermique et chaque surface définie au n° 3 quatre ∞^3 correspondances ponctuelles échangeant les lignes de longueur nulle de la première en asymptotiques de la seconde, autrement dit remplaçant un réseau orthogonal de la première par un réseau conjugué de la seconde, et conservant les lignes de courbure.

L'intersection des deux classes de surfaces se compose des surfaces isothermiques à représentation sphérique isotherme, surfaces que j'ai déterminées dans une Note précédente (*Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 921).

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur la polymérisation de la lévoglucosane.* Note de MM. **Amé Pictet** et **J.-H. Ross**, présentée par M. Georges Lemoine.

L'influence que la pression exerce sur la polymérisation de la glucosane a été signalée dans une précédente Note [1]. En étendant nos recherches à son isomère, la *lévoglucosane*, nous avons pu constater, d'une manière plus nette encore, cette même influence.

Lorsqu'on chauffe la lévoglucosane à 140° en présence d'une trace de chlorure de zinc, la réaction

$$n\,C^6H^{10}O^5 = (C^6H^{10}O^5)^n$$

s'effectue en quelques minutes; mais elle aboutit à des produits différents suivant la pression à laquelle on opère. En élevant graduellement cette pression, on observe une augmentation concomitante de n, qui prend successivement les valeurs 2, 4, 6 et 8. Nous avons pu préparer de cette manière, par voie de synthèse, une série de polylévoglucosanes tout à fait comparable et parallèle à la série des polyamyloses, que fournit la dégradation progressive de l'amidon sous l'influence du *Bacillus macerans*.

A la pression de 15^{mm} de mercure, nous avons obtenu une *dilévoglucosane* $(C^6H^{10}O^5)^2$. Celle-ci se distingue de la lévoglucosane par son insolubilité dans l'acétone; on peut donc la purifier facilement en dissolvant le produit brut dans l'acide acétique et en versant la solution dans 3 ou 4 fois son volume d'acétone. La dilévoglucosane se précipite sous la forme d'une poudre blanche, amorphe, fusible sans décomposition à 135° et douée d'une saveur faiblement sucrée. Elle se dissout assez facilement dans l'alcool à 95 pour 100 et se dépose par refroidissement; elle est très soluble dans

(1) *Comptes rendus*, t. 173, 1921, p. 158.

l'eau, l'acide acétique et la pyridine, mais insoluble dans les autres dissolvants usuels. Poids moléculaire, déterminé par cryoscopie dans l'eau : 322 (calculé 324). Pouvoir rotatoire + 28°, 2 (la polymérisation de la lévoglucosane entraîne donc un changement de signe (du pouvoir rotatoire).

La même opération, faite à la pression atmosphérique, fournit presque exclusivement une *tétralévoglucosane* $(C^6H^{10}O^5)^4$. On la purifie en la dissolvant dans une petite quantité d'eau et en ajoutant de l'alcool. Précipité blanc. Saveur fade et non plus sucrée. Très soluble dans l'eau, assez soluble dans la pyridine, mais insoluble, même à chaud, dans les alcools méthylique et éthylique, ainsi que dans les autres dissolvants organiques. Poids moléculaire 640 (calculé 648). Pouvoir rotatoire + 111°,9.

Pour étudier le phénomène à des pressions plus élevées, nous avons chauffé la lévoglucosane en tubes scellés, en présence d'un liquide volatil ne possédant pas d'action sur la lévoglucosane ou sur le chlorure de zinc, et dont la tension de vapeurs à la température de 140° fût connue. En nous servant de benzène (4^{atm},6), nous avons obtenu une *hexalévoglucosane* $(C^6H^{10}O^5)^6$. C'est, comme le polymère précédent, une substance amorphe, blanche, très soluble dans l'eau, d'où l'addition d'une faible quantité d'alcool la précipite. Mais elle s'en distingue nettement par son insolubilité dans la pyridine, ainsi que par son poids moléculaire (trouvé 964, calculé 972) et par son pouvoir rotatoire (+ 94°, 1).

Enfin, en remplaçant le benzène par l'éther, dont la tension de vapeurs à 140° est de 13^{atm},3, nous avons vu se former un polymère d'un ordre plus élevé encore, l'*octolévoglucosane* $(C^6H^{10}O^5)^8$. Mêmes solubilités que l'hexomère, mais poids moléculaire 1318 (calculé 1296) et pouvoir rotatoire + 72°, 8.

Ces trois derniers polymères ne présentent pas de points de fusion nets, mais entrent en décomposition vers 195°-200°. Ils possèdent la même saveur fade. Aucun d'eux n'est coloré par l'iode.

On voit par ce qui précède que, par polymérisation à une température constante, mais sous des pressions croissantes, la lévoglucosane donne des produits dont les propriétés se rapprochent de plus en plus de celles des dextrines. Ce fait nous paraît présenter quelque intérêt au point de vue du mécanisme de la transformation du sucre en amidon dans les plantes, cette transformation ayant lieu dans des cellules où règnent de fortes pressions, supérieures peut-être à celles que nous avons employées dans nos expériences.

MINÉRALOGIE. — *Sur les cristaux liquides de phosphate de calcium.* Note [1] de M. P. Gaubert.

Les rhomboèdres de clivage, obtenus en pulvérisant grossièrement les cristaux de calcite, deviennent monoréfringents et conservent leur forme et une certaine transparence quand on les chauffe au rouge pour chasser l'acide carbonique. Ils se comportent alors comme un corps poreux et adsorbent les matières colorant un liquide n'agissant pas sur la chaux (indophénol ou bleu de Java dissous dans le xylol). Il y a là, par conséquent, un fait comparable à celui qui a été observé avec certaines zéolites, la biotite, etc., quand on leur enlève les bases ne laissant que la silice. Cependant l'état d'agrégation des molécules de chaux n'est pas très constant : la densité et l'indice de réfraction varient légèrement et, en outre, il existe parfois des plages biréfringentes à la périphérie du rhomboèdre. Ces modifications, que j'étudierai dans une autre Note, dépendent surtout de la température à laquelle les cristaux de calcite ont été portés et du temps pendant lequel on les a chauffés.

Ces rhomboèdres attaqués par l'acide orthophosphorique montrent les particularités suivantes. Sur chaque face et y adhérant très fortement, apparaît une masse gélatineuse lamellaire dont l'épaisseur augmente, plus ou moins rapidement, suivant le degré de concentration de l'acide employé.

Avec l'acide orthophosphorique ayant une densité de 1,58, et l'observation étant faite au microscope sur une lame de verre recouverte d'un couvre-objet, on voit que les prismes, ou plutôt les lames gélatineuses rectangulaires, atteignent jusqu'à un demi-millimètre dans la direction perpendiculaire à la face de clivage dont la trace forme l'un des côtés du rectangle. Elles sont biréfringentes et, leur épaisseur augmentant avec le temps, elles peuvent montrer au bout d'un quart d'heure des teintes de polarisation atteignant le bleu de premier ordre. La biréfringence de ces plages n'a pu être mesurée exactement, elle semble toutefois être un peu inférieure à celle de l'apatite.

Les lames ont en général un contour légèrement arrondi à leur extrémité libre et ont à peu près la même épaisseur sur toute leur étendue. Elles s'éteignent perpendiculairement aux faces du rhomboèdre qui les supportent et c'est habituellement le petit indice n_p qui est parallèle à cette

(1) Séance du 18 avril 1922.

direction. Cependant c'est quelquefois n_g. Parfois, les deux sortes d'orientation optique se produisent successivement dans la formation de la même lame qui rappelle alors un cristal maclé.

Une légère pression, exercée avec une aiguille, sur le couvre-objet, aplatit la lame et modifie par conséquent les teintes de polarisation. Si elle n'est pas trop forte, les mêmes couleurs réapparaissent de nouveau dès qu'elle cesse ; la lame de phosphate de chaux se comporte donc comme une membrane élastique.

Quand tous les rhomboèdres attaqués sont dissous, les lames qui adhéraient fortement à ces derniers deviennent libres et s'il n'y a pas trop d'acide phosphorique en excès, elles se réunissent aux voisines et gardent leur orientation optique particulière, ou prennent la même orientation suivant la position qu'elles ont l'une par rapport à l'autre. L'ensemble forme une masse très molle pouvant couler, mouler les bulles d'air se rencontrant sur son passage et former autour de ces dernières des sphérolites à croix noire.

Mais ce liquide biréfringent n'est pas stable; alors qu'au début de leur formation, les lames sont tout à fait transparentes, homogènes, elles deviennent peu à peu troubles par la formation d'un nombre considérable de corpuscules, constitués probablement par des cristaux extrêmement petits. Au bout de plusieurs heures, des cristaux de phosphate monocalcique hydraté ($CaH^4P^2O^8, H^2O$) étudié par Joly font leur apparition.

Avec l'acide orthophosphorique à 60° B. (densité 1,713) le phénomène est le même, mais il se produit plus lentement et au début les lames, étant très minces, semblent être isotropes. Ce n'est qu'au bout de quelques minutes que la biréfringence apparaît. Avec l'acide 45° B., l'attaque est beaucoup plus rapide et la phase biréfringente est de très courte durée.

Si l'on emploie des petits rhomboèdres de calcite intacte, des plages biréfringentes peuvent être observées, mais elles sont beaucoup moins nettes et perdent rapidement leurs propriétés en passant à la phase trouble.

Les faits observés avec les acides lévulique, oléique et autres acides gras montrent une certaine analogie avec ceux qui viennent d'être décrits.

Les mêmes rhomboèdres de clivage de chaux, attaqués à froid par l'acide lévulique très concentré et sur une lame de verre, s'entourent d'une couche biréfringente augmentant très lentement d'épaisseur contrairement à ce qui a lieu avec l'acide phosphorique. Cette couche adhère très fortement à la chaux et quand les rhomboèdres ont disparu, on a une masse gélatineuse de lévulate de calcium beaucoup plus biréfringente que celle obtenue par le phosphate. Comme il s'agit de cristaux mous, les phénomènes observés avec le

microscope polarisant sont très variés, surtout si les lamelles biréfringentes et molles sont noyées dans un excès d'acide lévulique. Ainsi des particules biréfringentes, en apparence complètement isolées les unes des autres, prennent la même orientation sous l'influence d'une certaine pression exercée sur la lamelle couvre-objet et forment des plages de plusieurs millimètres carrés de surface ayant les mêmes propriétés comme s'il s'agissait d'une lame cristalline. On peut ainsi obtenir des plages rigoureusement perpendiculaires à un axe optique positif.

Les cristaux visqueux de lévulate de calcium ne sont pas stables, il se produit finalement les aiguilles monocliniques bien connues de lévulate de calcium hydraté $(C^6H^7O^3)^2Ca, 2H^2O$.

La biréfringence des sels de calcium considérés ne peut pas être attribuée à des tensions existant dans une masse gélatineuse, comme le suppose G. Quincke pour certains précipités ([1]). Elle est dans les cas du phosphate et du lévulate beaucoup trop élevée et en outre elle disparaît quand la substance, tout en conservant sa viscosité, passe à une autre forme.

Ces cristaux liquides ou mous doivent aussi pouvoir se produire dans d'autres cas, mais les rhomboèdres de chaux que j'ai employés permettent de mettre leur existence en évidence en orientant les molécules cristallines et en provoquant ainsi la formation de plages homogènes très étendues dont l'étude est possible au microscope.

MAGNÉTISME. — *État magnétique de basaltes arctiques.* Note ([2]) de M. P.-L. MERCANTON, présentée par M. le Prince Bonaparte.

A diverses reprises ([3]), en donnant les résultats de mes recherches sur l'aimantation permanente de roches éruptives, j'ai souligné l'intérêt de pareille étude pour l'histoire du champ magnétique terrestre. L'examen de deux séries de basaltes d'âges très différents vient de me donner à nouveau des indications éminemment suggestives.

([1]) On pourrait aussi supposer, bien que ce soit peu probable, qu'il se produit d'abord une lame ou membrane gélatineuse isotrope, devenant ensuite biréfringente en se gonflant par suite de l'adsorption de l'acide employé.

([2]) Séance du 18 avril 1922.

([3]) P.-L. MERCANTON, *Aimantation de diabases du Spitzberg* (*Bull. Soc. vaudoise des Sc. nat.*, 1910, p. V-LXXVI), et *État magnétique de basaltes groenlandais* (*Archives de Genève*, novembre 1917).

La première série comprend quatre blocs de basalte franc prélevés dans la nappe où serpente le canion de la Rödelv, à Godhavn, dans l'île de Disco (Grönland occidental), au voisinage de la station arctique danoise et au bord de la mer. Cette nappe semble remplir une ancienne vallée creusée dans le gneiss qui sert de soubassement aux grands escarpements éruptifs du Skarvefjeld et du Blaafjeld. Elle est comme eux d'âge tertiaire.

Les blocs ont été prélevés, à la faveur de la diaclase de la roche, après repérage soigneux de leur position dans l'espace.

Trois d'entre eux soumis, à l'état brut, au contrôle magnétométrique, ont montré sans aucune ambiguïté des polarités sud de leurs faces inférieures et nord de leurs faces supérieures, avec des polarités diverses, mais opposées deux à deux, de leurs faces latérales.

Le quatrième bloc a été taillé en cube, de 7^{cm} d'arête environ, assez imparfait malheureusement, mais suffisant pour autoriser les mesures. Il a décelé une aimantation correspondant à un champ magnétique incliné *australement* de quelque 54° sous l'horizon, donc pôle sud en bas.

Ainsi donc le champ terrestre paraît avoir eu, à l'époque du refroidissement de ce basalte, une inclinaison *australe*. L'hypothèse d'un retournement de la couche de lave, sens pour sens, depuis sa réaimantation du refroidissement semble en effet insoutenable.

La seconde série de roches comprend trois blocs de basalte aussi. Je les ai prélevés dans la falaise, haute de 15^{m} environ, qui termine à la mer, la nappe formant le plateau où se dresse la station de T.S.F de l'ingénieur Ekerold, à l'est de la baie de Jameson, dans l'île arctique de Jan Mayen. Cette coulée provient d'un des cratères adventifs du Beerenberg, au pied sud de la montagne [cratère Esk (Vogt) ou son voisin immédiat].

Ces échantillons ont donné tous trois et sans ambiguïté les preuves d'une aimantation pareille à celle qu'une lave prendrait de nos jours en se figeant dans le champ terrestre de Jan Mayen. La face inférieure était nord et la supérieure sud; or la coulée de lave est incontestablement récente et ne date vraisemblablement que de quelques siècles en arrière.

De l'époque tertiaire (basaltes de Disco) à l'époque moderne (basaltes de Jan Mayen), l'inclinaison magnétique terrestre paraît donc avoir dans les régions boréales changé de sens. La constatation est d'intérêt majeur et fait désirer la contre-épreuve par l'examen de laves de l'hémisphère austral. Une collaboration internationale serait la bienvenue dans ce domaine vaste et plein de promesses.

PALÉONTOLOGIE. — *Sur la phylogénie de l'*Elephas antiquus. Note de M. **Sabba Stefanescu.**

Les paléontologistes qui ont étudié la phylogénie de l'*Elephas antiquus* ne sont pas d'accord; tandis que les uns, tels que Soergel et Dietrich, admettent qu'il descend de l'*Elephas meridionalis*, d'autres, tels que Pohlig et Andrews, par des formes intermédiaires, le font descendre de l'*Elephas africanus*. Or, d'après mes recherches, *les trois espèces précitées appartiennent à trois phylums différents d'éléphants; elles ne sont pas liées par une filiation généalogique directe*. Cette conclusion est basée sur les faits suivants :

I. Georges Cuvier (¹) a représenté, vues de face, des lames dentaires d'*Elephas africanus* et d'*Elephas indicus*, afin de démontrer qu'on ne peut les confondre. Falconer et presque tous les paléontologistes qui ont étudié les molaires des éléphants n'ont pas suivi la méthode de Cuvier, mais dernièrement Soergel (²) a fait figurer, vues de face, quelques lames dentaires d'*Elephas meridionalis*, *antiquus*, *trogontherii et primigenius*, pour démontrer que chacune d'elles est formée de trois piliers longitudinaux (en allemand drei pfeilern). A mon avis, cette conception est contraire à la réalité des faits observés, car chaque lame dentaire est formée de deux tubercules congénères, différemment différenciés et inégalement développés, T_{tr} et T_{cr}.

II. Pour conclure à l'origine de l'*Elephas antiquus*, j'ai étudié l'organisation des lames dentaires de cette espèce, et j'expose le résultat :

a. Quoique leurs bords internes, normalement fusionnés, sont un peu plus larges que leurs bords externes, les T_{tr} et T_{cr} sont des plaques plus ou moins rectangulaires.

b. Généralement les lames sont presque également larges depuis la base jusqu'au sommet, mais quelquefois elles sont beaucoup plus étroites vers le sommet que vers la base; un rétrécissement plus ou moins brusque sépare les deux parties.

c. A partir du sommet vers la base, suivant les niveaux, les sections transversales formées par l'usure des lames dentaires varient beaucoup d'aspect. Pourtant celles qui ont l'aspect d'un rectangle allongé, accompagné à chacune de ses extrémités par un petit cercle, ellipse ou rectangle, et celles qui ont l'aspect d'un losange très allongé sont caractéristiques. Les

(¹) *Ossements fossiles*, 1821, p. 46, pl. III, fig. 5-6.

(²) *Elephas trogontherii und Elephas antiquus*, 1912, p. 8-10, fig. 3-10.

premières sont formées par les lobes internes (a, p, m) et par les lobes externes (e) des T_{tr} et T_{cr}, coupés au-dessus du fond des entailles qui séparent les lobes externes; les secondes sont formées par les T_{tr} et T_{cr} coupés au-dessous du fond des mêmes entailles.

d. Le contour des sections losangiques présentent, normalement, deux coins médians proéminants, situés respectivement dans le prolongement de la petite diagonale, qui est plus ou moins inclinée sur la grande. D'autres coins latéraux, variables en nombre et en grandeur, normalement plus petits que les médians, sont situés sur les côtés antérieurs et postérieurs du losange.

e. Chacun des deux coins médians correspond à une arête longitudinale proéminente, qui de la base monte au sommet de la lame. Ces deux arêtes sont les lobes antérieur et postérieur (a, p) du T_{tr}. Normalement elles sont également développées, mais souvent l'une d'elles reste rudimentaire; dans ce cas, la section losangique n'a qu'un seul coin médian proéminant.

f. Chacun des coins latéraux correspond à un pli longitudinal situé sur la face antérieure ou postérieure des T_{tr} et T_{cr}, plus ou moins parallèlement à l'arête médiane. Les coins latéraux, de même que les plis qui leur correspondent, sont dirigés plus ou moins obliquement et respectivement vers les bords externes des T_{tr} et T_{cr}.

g. Tandis que les arêtes médianes s'étendent de la base au sommet, les plis proéminents sont localisés sur les deux tiers supérieurs de la lame. Sur le tiers inférieur, les plis sont plus nombreux, mais plus fins et plus régulièrement parallèles; c'est pourquoi, à mesure que le niveau de la section transversale est plus près de la base de la lame, son contour est plus finement et plus uniformément denticulé.

h. Les plis proéminents appartiennent aux principales ramifications ou lobes de T_{tr} et T_{cr}; généralement ils sont réguliers et sans pustules, mais quelquefois sont très épais, pustuleux et monstrueusement développés.

i. Souvent les ramifications du sommet des T_{tr} et T_{cr} n'ont pas la même direction, car tandis que les ramifications du sommet du T_{tr} se prolongent sans changer de direction, celles du T_{cr} se prolongent obliquement vers l'extérieur, comme si elles étaient renversées; dans ce cas, les plis longitudinaux des faces antérieure et postérieure qui leur correspondent sont infléchis de la même façon. Cela nous montre que les T_{tr} et T_{cr} des lames se rencontrent par leurs bords internes et fusionnent sans alterner; par conséquent, l'*Elephas antiquus*, de même que l'*Elephas africanus*, est issu des mastodontes bunolophodontes dont les collines sont formées de deux

tubercules congénères non alternes. Mais malgré cette ressemblance d'origine, ces deux espèces ne sont pas liées phylogénétiquement, car leurs lames dentaires, bien que construites d'après le même plan d'organisation, diffèrent tellement par leurs caractères morphologiques, qu'à première vue on les distingue très facilement. Elles appartiennent à deux phylums différents d'éléphants, issus peut-être d'un groupe ancestral commun, mais évolués dans deux directions différentes.

III. Soergel (¹) a rapproché l'*Elephas antiquus* de l'*Elephas trogontherii* et a distingué des formes intermédiaires : *Elephas antiquus* var. *trogontherii* et *Elephas trogontherii* var. *antiquus*. Or, d'après mes recherches, les deux espèces en question n'appartiennent pas à un seul phylum ; leurs lames dentaires diffèrent tellement par leurs caractères morphologiques, qu'il est impossible de les confondre. Surtout les lobes cunéiformes des crêtes radicales des molaires de l'*Elephas antiquus* sont caractéristiques de cette espèce. C'est pour la première fois que la morphologie des lobes radieaux et des crêtes radicales trouve application pratique en Paléontologie.

IV. Soergel et Dietrich (²) ont admis que l'*Elephas antiquus* est le descendant de l'*Elephas meridionalis*. Mais ces deux espèces n'appartiennent non plus à un seul phylum, car tandis que l'*Elephas antiquus* est le descendant des mastodontes bunolophodontes à collines formées de tubercules congénères non alternes, l'*Elephas meridionalis* est issu des mastodontes bunolophodontes à collines formées de tubercules congénères en apparence alternes.

PALÉONTOLOGIE VÉGÉTALE. — *Sur les Conifères et les Fougères du Wealdien de Féron-Glageon* (Nord). Note (³) de M. **Alfred Carpentier**, présentée par M. Gaston Bonnier.

La flore wealdienne du nord de la France est remarquable par l'abondance et la variété des Conifères et des Fougères, par la présence de plusieurs genres de Cycadophytes et de quelques Ginkgoinées (⁴).

Conifères. — Le *Pinites Solmsi* Sew. (ou une forme voisine) est représenté à Féron par de longues aiguilles. Des rameaux garnis de feuilles uninerviées,

(¹) *Op. cit.*, p. 78, 86, pl. I, fig. 8, et pl. II, fig. 1-5, 7.

(²) *Stammesgeschichte des Elephas africanus*, p. 66.

(³) Séance du 18 avril 1922.

(⁴) Voir *Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 1428, et t. 173, 1921, p. 327.

rappelant celles du genre *Taxus*, se placent dans le genre provisoire *Taxites* Sew. et mieux dans le genre *Elatocladus* de M. Halle ([1]). A l'*Elatides curvifolia* (Dunker) Sew. il faut joindre une forme à feuilles plus trapues et moins recourbées.

La plante la plus fréquente à Féron et commune aux divers gisements étudiés est le *Sphenolepidium kurrianum* (Dunker) Sew. Nous signalons spécialement un petit strobile, à écailles mucronées, qui termine un ramuscule infléchi de ce *Sphenolepidium*. D'autres empreintes d'axes grêles, très ramifiés, dont les petites écailles apprimées sont disposées en ordre spiralé sont à ranger près du *Cyparissidium gracile* Heer; le genre *Cyparissidium* est, d'après M. Seward, caractéristique de l'Infracrétacé ([2]). Aux *Cupressacées* se rapportent de petits rameaux à feuilles écailleuses, décussées, semblables à celles des *Thuya*.

Parmi les inflorescences ou fleurs de Gymnospermes que nous avons recueillies, un strobile à écailles larges et serrées rappelle ceux du genre *Cedrus* ou de certains *Abies*, *A. webbiana* Lindl. par exemple; une graine ailée de Pin ou d'une abiétinée voisine, une écaille ovulifère d'*Araucarites*, une autre comparable à celle du *Tsuga canadensis* ou du *Picea orientalis* sont aussi à signaler.

Mais ce qui augmente l'intérêt du gisement de Féron au point de vue botanique, c'est la découverte de fleurs ou d'inflorescences mâles. On peut d'ores et déjà les rattacher à trois types : 1° strobiles allongés comme ceux du genre *Cedrus*; étamines à limbe dilaté en écaille peltée, portant les sacs polliniques ovoïdes sur sa face inférieure de même que dans les pins et les cèdres; grains de pollen munis de deux ballonnets, semblables à ceux que de Solms-Laubach a trouvé isolés dans une roche wealdienne de la Terre François-Joseph; 2° strobiles de forme très allongée à comparer à certains *Masculostrobus* que MM. Seward, Moeller et Halle sont disposés à attribuer à l'*Elatides curvifolia* ([3]); sur l'emplacement présumé des sacs polliniques des masses jaunâtres contiennent des grains de pollen arrondis, à exine

---

([1]) T.-G. Halle, *The mesozoic Flora of Graham Land* (*Wissenschaftliche Ergebnisse der Schwedischen Südpolar-Expedition* 1901-1903, Bd 3, Lief 14, p. 83; Stockholm, 1913).

([2]) A.-C. Seward, *Fossil plants*, IV, 1919, p. 444.

([3]) A.-C. Seward. *The jurassic flora of Sutherland* (*Trans. Roy. Soc. Edinburgh*, t. 47, 1911, p. 688). — Hj. Moeller and T.-G. Halle, *The fossil flora of the coal-bearing deposits of South-Eastern Scania* (*Arkiv för Botanik*, Band 13, n° 7, 1913, p. 36).

réticulée, semblables à ceux de l'*Araucaria imbricata;* 3° inflorescences dont les étamines, à filet consistant, se recourbent en une lame subovale dans leur région distale. A la face interne de ces lames des masses jaunâtres sont constituées de grains de pollen à ailes, comme ceux des *Abiétinées;* la longueur moyenne des grains est de 75^{μ}.

Il n'est pas rare de trouver des bois silicifiés dans les sables wealdiens de Féron-Glageon; ils sont remaniés dans les argiles glauconieuses d'âge cénomanien qui recouvrent immédiatement le Wealdien à Montfaux, sur le territoire de Glageon. Certaines coupes exécutées dans ces bois silicifiés nous ont appris qu'il s'agit de bois de Conifères; les zones dites *annuelles* sont bien marquées, les zones correspondant aux trachéides automnales sont étroites; les ponctuations aréolées sont presque toujours unisériées et le bois est pourvu de cellules résinifères. Les rayons médullaires, qui comptent de 3 à 24 cellules, ont tout à fait l'aspect de ceux du *Cupressinoxylon Hortii* Stopes ([1]).

Fougères. — Aux espèces wealdiennes déjà signalées en 1921 nous pouvons ajouter une empreinte de penne stérile qui nous paraît identique à la fougère que Schenk a décrite sous le nom de *Pecopteris Geinitzii* ([2]); d'autres fragments rappellent le *Pteris frigida* Heer, le *Cladophlebis Browniana* (Dunker) Sew. et le *Cl. Dunkeri* (Schimper) Sew. Nous attirons surtout l'attention sur les empreintes de deux Fougères : l'une d'elles a des frondes bipennées et ressemble beaucoup pour la disposition, la forme et la nervation des folioles à certaines formes du *Cladophlebis denticulata* Brongt. ([3]). D'après l'organisation des sores elle se rapproche des *Gleichenia;* les spores tétraédriques mesurent de 21^{μ} à 25^{μ} et chaque face triangulaire est entourée d'un rebord épaissi comme chez les *Matonia*. L'autre Fougère est à l'état stérile; les folioles isolées sont très étroites et très longues; leur forme et leur nervation permettent de les comparer au genre *Andriania* de Braun ou à certain *Laccopteris* à nervures non anastomosées d'apparition beaucoup plus ancienne que le Wealdien ([4]).

([1]) M. C. Stopes, *Catalogue of the Mesozoic plants in the British Museum* (*The Cretaceous Flora*, Part II, pl. XVIII, fig. 2; 1900).

([2]) Cf. Schenk, in *Palæontographica*, vol. 29, fig. 2, 2*a*; 1871.

([3]) Cf. A.-C. Seward, *Catalogue of the Mesozoic plants...* (*The Jurassic Flora*, I, p. 142; pl. XX, fig. 4; 1900).

([4]) Voir à ce sujet W. Gothan, *Die unter-liassische Flora der Umgegend von Nürnberg* (*Abhandl. der Naturhistorischen Gesellschaft Nürnberg*, XIV, Bd 4, S. 12; Taf. 18, fig. 1-3; 1914).

Par ses affinités à la fois jurassiques et infracrétacées la flore de Féron se place bien dans le Wealdien, c'est-à-dire dans les couches de passage du Jurassique au Crétacé et du Néocomien inférieur. Un Mémoire détaillé précisera les affinités et les caractéristiques de cette flore.

BOTANIQUE. — *Sur une tardive régénération de Mousse.* Note de M. **Jacques Maheu**, présentée par M. L. Guignard.

La régénération des mousses à longue échéance n'a pas, du moins à notre connaissance, encore été signalée jusqu'ici. Nous venons d'assister à celle d'un échantillon de *Barbula Muralis* Hedwig., fait observé dans une ancienne culture en boîte de Pétri, demeurée à sec durant 14 ans. Toute trace de végétal ayant disparu sur le coussinet de terre réhumidifié, et mise en pleine lumière, la mousse se mit à végéter à nouveau. L'étude des différentes phases de développement a permis de faire les observations suivantes :

Sur des fragments de vieilles feuilles, des cellules nématogènes sont l'origine de filaments protonémiques pluricellulaires, chlorophylliens (*fig.* 1). Le dernier article s'arrondit, se transforme en propagule, fait déjà observé par nous chez plusieurs espèces de *Barbula* et *Amblystegium leptophyllum* Schimp. ([1]).

Bientôt la propagule se détache par contraction et désagrégation de la cellule sous-jacente. Elle germe (*fig.* 2), donne un filament pluricellulaire d'abord fin, qui grandit et s'allonge en articles élargis, puis rectangulaires à parois épaisses et brunes, mais remplis de chloroplastides. Il se constitue ainsi un véritable protonéma ramifié fixé au sol par de longs rhizoïdes bruns pluricellulaires, à parois granuleuses, dépourvus de chlorophylle (*fig.* 3).

Bientôt l'une des cellules de ces filaments se boursoufle en une petite hernie (*fig.* 4), laquelle se cloisonne (*fig.* 5) pour produire une sorte de petite bulbille, analogue à celles observées sur les feuilles de diverses espèces de mousses (*fig.* 6) ([2]) (*Webera, Encalypta*). Ces dernières germent sur le protonéma lui-même. Les cellules de la base s'allongent en

---

([1]) J. Maheu, *Monographie des principales déformations des Muscinées cavernicoles* (*Comptes rendus Congrès des Sociétés savantes*, Paris, 1906, p. 11).

([2]) Correns, *Untersuchungen über die Vermehrung der Laubmoose durch Brutorgane und Stecklinge*, 1899, p. 158.



Fig. 1. Protonéma primaire propagulifère né aux dépens d'anciennes feuilles (*Barbula muralis*). — Fig. 2. Germination de la propagule. — Fig. 3. Protonéma secondaire bulbigène. — Fig. 4. Cellule initiale de la bulbille. — Fig. 5 et 6. Sa différenciation. — Fig. 7 et 8. Sa germination (Gross. 225 diamètres). — Fig. 9. Tige feuillée née de la cellule apicale de la bulbille (Gross. 50 diamètres).

rhizoïdes pluricellulaires, à parois brunes, un peu échinulées, dépourvus de chlorophylle (*fig.* 7). La cellule apicale se cloisonne et produira une petite tige feuillée (*fig.* 9).

La nouvelle plantule, très petite, n'excédant jamais une hauteur de plus de 12^{mm} à 15^{mm}, présente tous les caractères d'un *Barbula* vivant en atmosphère humide : tige longue étiolée, feuilles allongées dans toutes ses parties, dents oblitérées, cellules des tissus homogènes, pas de tendance à la formation de nervure centrale. Chloroplastides petits irréguliers, disposés le long des parois cellulaires (*fig.* 10).

En résumé, il s'agit d'un cas de régénération, sous l'action de l'humidité, de *Barbula muralis* demeuré 14 ans à l'état de sécheresse absolue, production de nouvelles pousses feuillées par le développement de protonémas primaires et secondaires, les premiers naissant sur des fragments de vieilles feuilles, par allongement de cellules nématogènes donnant des propagules produisant par germination des protonémas secondaires bulbigènes. Les bulbilles se transforment sur place en plantes feuillées.

Ce mode de développement semble avoir été réalisé par la mousse en vue de créer une méthode de multiplication intensive ; extension et dissémination de la plante, celle-ci une fois étendue et fixée pouvant résister et attendre plus aisément les conditions favorables à la formation des sporogones, devant assurer le maintien de l'espèce.

BOTANIQUE. — *Des synanthies, à propos du* Narcissus Tazetta *L.* Note (¹) de M. G. Nicolas, présentée par M. Gaston Bonnier.

Comme le disait déjà Moquin-Tandon, en 1841, et quoi qu'en ait écrit Clos, les synanthies sont moins rares qu'on ne le pense. L'exemple qui fait l'objet de cette Communication est un des plus frappants que j'ai rencontrés, plus complexe encore que celui qui est signalé par Moquin-Tandon (²); il provient des environs de Carcassonne où il a été récolté par M. Morquer, seul au milieu d'une colonie de *N. Tazetta* normaux. J'ai cru utile d'insister sur cette synanthie, à la fois parce qu'elle est une nouvelle confirmation de la théorie ligulaire de la collerette des Narcisses, et surtout parce qu'elle ouvre des horizons nouveaux sur la cause qui provoque ce genre d'anomalies.

(¹) Séance du 18 avril 1922.

(²) Moquin-Tandon, *Éléments de tératologie végétale*, 1841, p. 266.

Normalement, la hampe florale du *N. Tazetta* se termine par un certain nombre de fleurs longuement pédonculées. Ici, surmontant la hampe florale, un pédoncule unique, circulaire au lieu d'être vaguement triquètre et plus épais que les normaux, comme, d'ailleurs, toute la partie située au-dessous des pièces florales. Ce pédoncule s'épanouit en une masse qui a l'apparence d'une fleur double, à nombreuses pièces florales blanchâtres pourvues de ligules orangées, mais qui résulte, en réalité, de la non-dissociation et de la concrescence de toutes les fleurs de l'individu.

Dans ce groupe floral, j'ai distingué de l'extérieur à l'intérieur :

1° Six pièces blanchâtres, libres, disposées normalement en deux verticilles de trois, légèrement réfléchies vers le bas et pourvues, sur leur face interne, d'une collerette orangée fendue en un point où ses deux bords se recourbent vers l'intérieur;

2° Six pièces blanchâtres, libres entre elles, munies chacune d'une ligule orangée libre de toute adhérence avec les ligules voisines; trois de ces pièces, situées un peu à l'intérieur des autres, portent sur leur face supérieure un petit bourrelet, ébauche d'anthère contenant du pollen;

3° Trois verticilles successifs de six pièces semblables aux précédentes, mais sans rudiments d'anthères, et de plus en plus petites à mesure que l'on se rapproche du centre;

4° Enfin, au centre, trois pièces blanchâtres, sans ligules.

Cet ensemble correspond à la concrescence d'au moins cinq fleurs représentées seulement par leur périanthe ligulé, dont les ligules restent libres ou se soudent pour donner une couronne presque complète. L'origine ligulaire de la couronne des Narcisses est ainsi démontrée une fois de plus par la Tératologie.

Anatomiquement, pas d'ovaire proprement dit à trois loges, mais une paroi très épaisse, entourant une cavité centrale où s'entremêlent les pièces florales énumérées plus haut; quelques ovules, cependant normalement organisés, sont répartis çà et là sur le bord interne de cette paroi. Dans le parenchyme qui la constitue et qui englobe de très nombreux faisceaux libéro-ligneux s'observent trois boutonnières orientées tangentiellement et limitées chacune par un épiderme identique à l'épiderme externe, et autour desquelles se trouve, comme dans celui-ci, une petite couche de parenchyme à chlorophylle; ces trois fentes sont tout simplement des restes de la soudure imparfaite de quelques-uns des bourgeons floraux. Cet aspect rappelle tout à fait ce que j'ai observé sur une fascie de *Chrysanthemum Myconis* L. [1].

---

[1] Nicolas, *Notes de tératologie végétale. Remarques sur les fascies à propos du* Chrysanthemum Myconis *L.* (*Bull. Soc. Hist. Nat. Afrique Nord*).

Morphologiquement, il s'agit donc bien d'une synanthie et non pas simplement d'une multiplication des organes floraux.

L'étude anatomique comparative de la hampe florale m'a révélé un caractère très intéressant, relatif à la répartition du tissu chlorophyllien. Dans les individus normaux, sous l'épiderme, se trouvent deux assises palissadiques bien nettes, bourrées de chloroplastes, puis une troisième moins allongée, et, enfin, quatre ou cinq assises de cellules arrondies renfermant encore de la chlorophylle; dans la fleur synanthiée, une seule assise palissadique et quelques assises de parenchyme arrondi bien moins riches en chlorophylle; la même différence se retrouve dans les pédoncules floraux. En résumé, *la synanthie est caractérisée, ici, par un moindre développement du tissu palissadique et de la chlorophylle, tant dans la hampe que dans les pédoncules floraux*. Il suffit, pour montrer l'importance de ce caractère différentiel, de se rappeler les belles recherches expérimentales de Molliard ([1]), qui, par l'addition de sucre à des solutions nutritives, a provoqué un plus grand développement du tissu palissadique. Inversement, ne peut-on admettre que, dans le *Narcissus* synanthié, le moindre développement du tissu palissadique et de la chlorophylle est la conséquence d'une nutrition insuffisante. Dans ces conditions, les bourgeons floraux, insuffisamment nourris, n'ont pu se dissocier, sont restés concrescents, d'où synanthie.

Il semble dès lors permis de considérer les synanthies, les syncarpies et même les fascies, en un mot, toutes les anomalies caractérisées par la non-dissociation et la concrescence des bourgeons, non pas comme provoquées, ainsi qu'on l'a dit si souvent, par un excès de nutrition, mais par un excès de nutrition déficiente. Il y aurait lieu désormais, dans l'étude de ce type de monstruosités, de ne pas perdre de vue cette hypothèse.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *L'amylocellulose considérée comme composé d'acide silicique et d'amylose*. Note de MM. **G. Malfitano** et **M. Catoire**, présentée par M. Roux.

La fécule de pomme de terre et encore plus l'amidon de maïs, quand on s'est assuré qu'ils ne contiennent pas de sable ni de débris de membranes cellulaires, étant attaqués par l'acide chlorhydrique, laissent des petits flocons

([1]) Molliard, *Action morphogénique de quelques substances organiques sur les végétaux supérieurs* (*Rev. gén. Botanique*, 19, 1907).

dont les cendres sont nettement siliceuses. Ménageant le chauffage dans l'eau avec ou sans addition d'acide, nous avons constaté que ce sont surtout les membranes des grains de fécule de pomme de terre, et comme des stromas dans le cas des grains d'amidon de maïs, qui constituent la partie résistante, que nous identifions avec ce qu'on a appelé *amylocellulose*. Bien qu'il ne soit pas possible d'obtenir un produit de composition constante, puisque la teneur de ce corps en matière organique diminue sans cesse pendant le traitement, il nous semble vraisemblable que l'intime liaison de l'acide silicique avec les molécules hydrocarbonées peut être envisagée comme constituant des composés complexes, trop variables pour être obtenus purs, néanmoins théoriquement représentés par la formule $[SiO^3(C^6H^{10}O^5)^n]H^2$.

Voici des expériences qui en résument beaucoup d'autres :

1. Fécule préparée au laboratoire partant de pommes de terre, rigoureusement exempte de matières terreuses et épurée par nombreuses lévigations des débris cellulaires, autant que l'a montré l'examen microscopique. Dans 100^g de cette fécule desséchée : cendres totales 101^{mg}, insolubles dans l'eau 80^{mg}, insolubles dans HCl, 4^{mg} presque complètement volatilisés, par traitement avec NH^4F et H^2SO^4. De la même fécule 900^g dans 5 litres de HCl, 0,5 N après macération sont chauffés au bain-marie bouillant pendant 30 minutes ; après repos la liqueur opalescente se clarifie en haut et devient plus opalescente en bas. Par décantations et lavages successifs, on épuise ce sédiment très léger sans y arriver complètement. On évapore la liqueur trouble dans la capsule de platine, il reste 4^g environ de matière qui, incinérée, laisse 23^{mg} de cendres dont 6^{mg} insolubles dans HCl et volatilisables par traitement au fluorure.

2. Amidon de maïs du commerce purifié par lévigation jusqu'à ce que 100^g attaqués par HCl donnent un liquide limpide qui se trouble ensuite. Dans 100^g : cendres totales 61^{mg}, dont 58^{mg} insolubles dans l'eau et 9^{mg} insolubles dans HCl et volatilisables, par traitement au fluorure. 1^{kg} de cet amidon, traité comme dans l'expérience précédente, laisse un résidu de 3^g environ contenant des quantités sensibles de graisse, après incinération : cendres totales 41^{mg} dont 24^{mg} insolubles dans HCl qui, après traitement au florure, se réduisent à 3^{mg} que l'eau dissout complètement. Dans une expérience analogue le résidu d'amylocellulose a été recueilli sur le filtre à succion et dégraissé par l'alcool et l'éther ; on a pesé 2^g environ de matière qui, incinérés, ont laissé 44^{mg} de cendres, dont 37 insolubles dans HCl, qui après fusion avec Na^2CO^3 se réduisent à 29^{mg} presque complètement volatilisés par traitement au fluorure.

3. 1^{kg} de fécule commerciale a été attaqué par 2 litres de HCl, 5N en agitant violemment ; il se forme une gelée qui se liquéfie peu à peu en un liquide sirupeux presque limpide qu'on décante du fond contenant les matières étrangères. Ce liquide au repos se trouble par des flocons très légers se déposant très lentement et imparfaitement. Le fond contenant la plus grande partie du précipité laisse par dessiccation 3^g de matière et après incinération 20^{mg} de cendres, dont 8^{mg} de SiO^2.

4. 1^{kg} de la même fécule est chauffé au bain-marie dans 2 litres de HCl, 5N et

filtré à chaud à travers du papier Chardin. A la liqueur filtrée parfaitement limpide on ajoute 2 litres de HCl, 10 N; il apparaît ainsi un trouble léger qui néanmoins sédimente et qu'on peut, par décantation et lavages avec l'eau alcoolisée, séparer imparfaitement de la partie soluble. On retire par évaporation 6g environ de matière qui laisse 18mg de cendres dont 4mg de SiO^2.

5. 250g de la même fécule sont transformés en dextrines par traitement à l'acide et dessiccation. Dissous dans 1 litre d'eau et filtrés, on y ajoute 1 litre de HCl, 10 N; il se forme ainsi un trouble léger qui, traité comme précédemment, donne environ 400mg de matière, qui laissent 6mg de cendres presque totalement constituées de SiO^2.

6. Amidon de maïs purifié et dégraissé par portions de 2g et chauffé à 100° dans des volumes différents d'eau ou à volume constant à température plus élevée : on constate que la partie résistante, les trois quarts environ, ne varie pas avec le volume d'eau et diminue en chauffant plus longtemps et à des températures plus élevées; elle se réduit, par exemple, à un tiers par chauffage à 130°. Le taux de la matière résistante diminue beaucoup plus par addition de HCl jusqu'à se réduire à quelques milligrammes, presque complètement constitués de sels.

La théorie qui nous guide dans ces recherches est celle défendue déjà par l'un de nous [1] : les différentes matières amylacées seraient des composés d'acide silicique, phosphorique, ou simplement d'eau avec $C^6H^{10}O^5$ selon le type de complexes de complexes, dont le plus simple aurait comme schéma $[A(C^6H^{10}O^5)^n]B$. Assurément les différences remarquées entre matières amylacées ne sont essentiellement que de degrés de résistance à l'action de l'eau chaude, des acides et des diastases. Les hypothèses de simple polymérisation et de condensation par élimination d'eau ne s'accordent pas avec les faits, parce que la presque totalité de l'amidon se dextrinifie par soustraction des matières minérales et par dessiccation.

En tout cas ces expériences entraînent notre conviction que la résistance remarquable de cette partie de l'amidon qu'on appelle *amylocellulose* doit être attribuée à la présence de silice. Il nous semble même intéressant de diriger l'attention sur le lien que, entre ces deux faits, il y a dans les celluloses en général, à savoir : la présence de silice et la très grande résistance à l'hydrolyse.

---

(1) Voir *Comptes rendus*, t. 143, 1906, p. 400.

PHYSIQUE BIOLOGIQUE. — *Influence de la chaleur et de quelques dissolvants sur la viscosité du sérum de cheval.* Note de M. **A. Vila**, présentée par M. E. Roux.

On sait que la chaleur apporte de profondes modifications aux colloïdes du sérum; nous allons voir que le contact des dissolvants neutres, tels que l'alcool ou l'acétone, leur fait subir des modifications comparables.

Des mesures de viscosité permettent de caractériser ces effets coagulants.

Ces mesures ont été faites en appliquant la méthode de Poiseuille et en utilisant comme viscosimètre le dispositif d'Ostwald. Toutes les valeurs indiquées proviennent de la formule $\eta = D\frac{T_1}{T_0}$, dans laquelle η figure la viscosité du liquide, D le poids spécifique, T_0 le temps d'écoulement de l'eau distillée, T_1 le temps d'écoulement du liquide étudié; toutes les déterminations étant faites à 15°.

Le graphique reproduit ci-après résume les expériences effectuées en vue de comparer les effets coagulants du chauffage à ceux des dissolvants.

Les déterminations ont porté : 1° sur des sérums chauffés; 2° sur des sérums ayant subi le contact de dissolvants; 3° sur des solutions de protéines séparées par le procédé à l'acétone.

I. Le sérum a été chauffé, en tubes hermétiquement bouchés, dans un thermostat. Aux temps indiqués on opérait les prélèvements à mesurer. Successivement les températures de 45°, 50°, 55° et 62°C. ont été étudiées. On trouvera, pointés sur les courbes I, II, III du graphique, les résultats observés.

A 45°C. la viscosité du sérum reste égale à celle du sérum normal ($\eta = 1,90$ à $1,95$), même après 48 heures de séjour dans le thermostat.

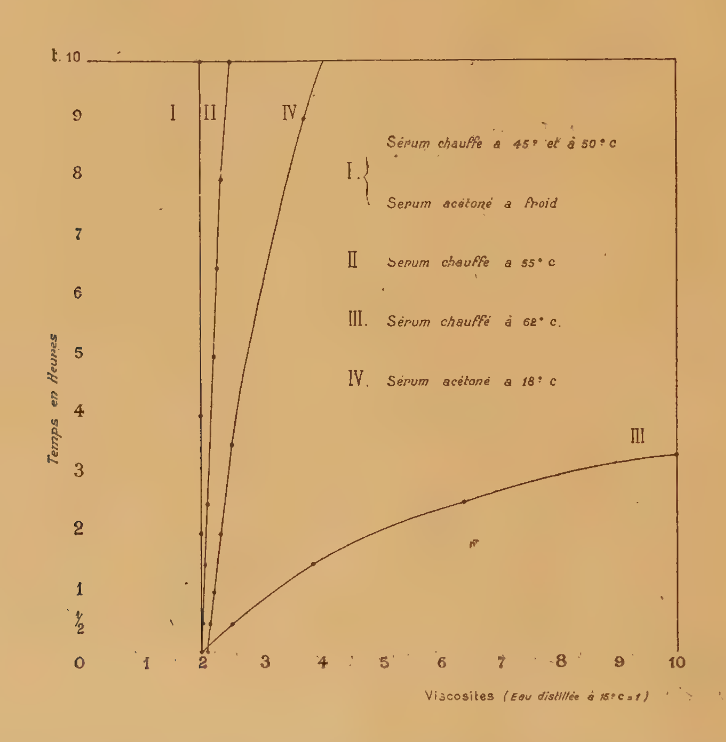
Il faut atteindre la température de 55°C. pour observer une variation accentuée en fonction du temps (voir la courbe II pour les dix premières heures). Pour des durées plus longues on a trouvé :

	T_1 à 15.	η à 15°.
	m s	
Après 10 heures à 55°C.	1.25	2,46
» 18 » »	1.48	3,10
» 28 » »	2.14	3,75

A 62° C. les variations sont très importantes (courbe III du graphique).

II. Les effets des solvants neutres sur le sérum ont été étudiés comme suit :

Chaque essai, sur 25$^{cm^3}$ de sérum, a été additionné de 75$^{cm^3}$ de dissolvant



pur, afin d'insolubiliser la totalité des protéines. Celles-ci, après filtration rapide sous vide, ont été aussitôt malaxées et lavées avec de l'éther sec; une dernière filtration donne une poudre blanche se gonflant et se dispersant aisément dans un faible volume d'eau. En ajoutant à cette solution le résidu de la distillation des solvants, on complète à 25$^{cm^3}$ le volume de la solution aqueuse des protéines; ce faisant, les substances dont elles avaient été séparées se trouvent restituées.

La viscosité des sérums acétonés à des températures comprises entre — 10° C. et 0° ne s'écarte pas sensiblement de la valeur constante indiquée par la ligne I du graphique. La courbe IV indique les variations observées sur des sérums maintenus en contact avec l'acétone à la température de 18° C.

Dans le Tableau ci-dessous, nous mettons en parallèle la viscosité de sérums alcoolés et acétonés.

Durée d'action des dissolvants.	Sérum acétoné. η.	Sérum alcoolé. η.
Après contact instantané à $-10°$C	1,95	»
» 1 heure de contact à »	2	»
» 2 » »	1,94	»
» 4 » »	1,90	2,56
» contact instantané à 18° C	1,95	3,48

On remarquera les viscosités supérieures des sérums alcoolés.

III. Dans un dernier Tableau nous indiquerons les résultats des mesures effectuées, non plus sur des liquides contenant la totalité des éléments du sérum, mais sur des solutions de même teneur en protéines, débarrassées des substances minérales et des matières grasses du sérum par le traitement à l'acétone.

Durée d'action de l'acétone.	D à 15°.	T_1 à 15°. (m s)	η à 15°.
(*a*) Contact instantané avec le sérum	1,0175	1.15,8	2,14
(*aa*) La même + 0g,015 de NaCl	1,0210	1. 9,6	1,98
(*b*) Contact de 3 heures avec le sérum	1,0185	1.29,8	2,54
(*c*) Contact de 6 heures avec le sérum	1,0129	1.55	3,25
(*d*) 3^{cm^3} de solution (*a*) + 0^{cm^3},5 H^2O	»	1. 6	1,84
(*e*) 3^{cm^3} de solution (*a*) + 0^{cm^3},5 acétone	»	1.27	2,43

L'expérience (*aa*) montre l'influence du chlorure de sodium sur la fluidité des protéines.

Les deux derniers essais, dans lesquels η passe de 1,8 à 2,4, mettent nettement en évidence l'action coagulante instantanée de l'acétone sur les protéines; action comparable à celle de la chaleur aux températures inférieures au point de coagulation massive.

Conclusion. — Il résulte de ces observations que l'action coagulante de l'acétone, analogue à un effet thermique, peut être atténuée, et même évitée, en prenant certaines précautions (abaissement de la température du milieu, rapidité des manipulations en présence du dissolvant, élimination aussi complète que possible de l'acétone).

Ce fait devait être signalé; nous rappellerons qu'il trouve application dans la séparation des protéines du sérum (1).

(1) M. Piettre et A. Vila, *Comptes rendus*, t. 170, 1920, p. 1466.

MICROBIOLOGIE. — *Recherches histo-microbiologiques sur la paralysie générale. Existence du tréponème dans le cytoplasme des cellules nerveuses de l'écorce cérébrale.* Note de M. Y. **Manouélian**, présentée par M. Roux.

A Noguchi revient le mérite d'avoir décelé en 1913 le tréponème dans la paralysie générale. Depuis, Marinesco et Minea, Levaditi et Marie, Bankowsky, Geber, Benedek et Tatar, Forster et Thomacszewsky, Pulido Valente, etc. ont confirmé la découverte de Noguchi.

En 1905 nous n'avions pas réussi dans nos recherches à cause de l'imprégnation massive des neurofibrilles; nous avons repris depuis quelques années l'étude de la paralysie générale. Nous l'avons pu faire grâce à l'extrême obligeance de M. Pulido Valente de Lisbonne, qui a bien voulu nous envoyer du matériel provenant des paralytiques généraux. Nous avons utilisé aussi des pièces provenant des services de M. Oettinger et de M. Paul Guiraud.

Pour la technique, nous nous sommes servi du procédé d'imprégnation argentique, des méthodes de Mann, de Nissl, etc.

Pulido Valente ayant eu la bonne fortune d'étudier à l'aide de la méthode de Noguchi un cas de paralysie générale où les tréponèmes étaient extrêmement nombreux [1], s'exprime ainsi : « Les tréponèmes se disposent autour des cellules nerveuses et y pénètrent même. Dans les régions les plus riches en parasites, c'est-à-dire où le processus est en pleine évolution, en mettant au point les divers plans, on constate nettement que les cellules nerveuses sont entourées d'agglomérations denses de tréponèmes qui leur forment une sorte d'enveloppement complet.... A une étape plus avancée de la désagrégation cellulaire, le noyau lui-même disparaît et de toute la cellule il ne reste plus que des amas de granulations entourées de parasites qui les traversent dans tous les sens. »

Et pour ce qui est des cellules névrogliques. « Dans le voisinage de ces cellules nous avons trouvé fréquemment le tréponème qui paraissait même pénétrer dans quelques-unes. »

---

[1] Sur deux préparations que M. Pulido Valente nous a adressées, les tréponèmes étaient plus nombreux dans l'écorce cérébrale que dans la plupart des chancres humains.

Donc d'après Pulido Valente, les tréponèmes s'attaquent aux cellules nerveuses, y pénètrent même, ils finissent par les détruire. A la fin on ne trouve à la place des éléments nerveux que des parasites et des amas de granulations.

Nous n'avons pas vu dans nos pièces une telle abondance de tréponèmes. A part certaines coupes où de rares vaisseaux étaient entourés par un treillis de spirochètes, les parasites étaient clairsemés.

Nous savons que dans l'immense majorité des cas les microbes, surtout les bactéries, vivent dans les humeurs, dans les éléments mobiles et fixes du tissu conjonctif et dans les endothéliums vasculaires; mais ils ne pénètrent pas dans les cellules des autres tissus.

Excepté dans la syphilis héréditaire du nouveau-né; *pantréponémose* où le tréponème pénètre dans les cellules nobles — les cellules hépatiques surtout —, le tréponème suit la règle générale; on ne le voit que dans les éléments que nous venons d'énumérer; il n'habite jamais dans les cellules des autres tissus. Or, dans la paralysie générale, le tréponème existe dans l'écorce cérébrale : il se trouve dans le lacis composé des dendrites des cellules nerveuses, des cylindres-axes et des prolongements des cellules névrogliques. *Dans la paralysie générale le tréponème n'est pas dans le cerveau comme il l'est dans un chancre, une syphilide ou une gomme; il se trouve dans le tissu propre du cerveau.* Mais fait encore plus intéressant : nos imprégnations montrent d'une façon indiscutable que *le tréponème pénètre dans le cytoplasme des cellules nerveuses du cortex.* Nos images sont schématiques : souvent dans nos préparations le pigment et les neurofibrilles ne sont pas colorés : sur le fond clair du cytoplasme se détache seulement le tréponème en noir avec tous ses caractères, le noyau de la cellule nerveuse est bien visible. Il ne s'agit point de cellules dégénérées ou détruites, mais d'éléments relativement bien conservés.

C'est dans les deuxième et troisième couches de l'écorce que nous avons le plus souvent fait ces constatations. Les cellules nerveuses parasitées sont surtout des éléments de petite taille que les auteurs désignent sous le nom de *grains.*

A la lumière de ces faits, voici comment nous concevons le processus de la paralysie générale.

Le tréponème gagne la pie-mère, et, après une période plus ou moins longue, il passe par les entonnoirs de cette membrane dans les gaines périvasculaires du cortex, il franchit l'espace lymphatique, atteint le tissu ner-

veux : c'est le début de la paralysie générale. Dans ce tissu, il se développe, crée un foyer et lèse les cellules nerveuses. Il y a successivement : méningite, lymphangite, encéphalite syphilitiques.

Mais quelques tréponèmes sont entrés dans le cytoplasme des cellules nerveuses de l'écorce où ils sont sans doute à l'abri des substances médicamenteuses. Et lorsque le foyer s'éteint, il existe quand même des réservoirs à virus. A un moment donné, le tréponème sort de la cellule nerveuse et se développe de nouveau; ainsi se rallument de nouveaux foyers.

Si les tréponèmes intra-cellulaires sont à l'abri des substances médicamenteuses, cela nous permet de comprendre aussi pourquoi le traitement antisyphilitique n'a pas de prise sur cette redoutable maladie.

La séance est levée à 17 heures.

É. P.

ERRATA.

(Séance du 10 avril 1922.)

Note de M. *Maurice Janet*, Sur les formes canoniques invariantes des systèmes algébriques et différentiels :

Page 993, ligne 3, *au lieu de* inférieur, *lire* supérieur.